里堂學算記五種

釋弧卷上

江都焦循學

曲線謂之弧，直線謂之弦，以弧爲弦，復以弦爲弧，則弧得合弧限謂之正弧，差弧限謂之斜弧，以斜爲正，復以正爲斜，則斜得不變者謂之本形，旁通者謂之次形，以本形爲次形，復以次形爲本形，則本形得此三者，弧角之樞也，其術之目，曰以角求弧，以弧求角，以弧角求弧，以弧角求角，舉其三以測其三，比例之精，轉移之巧，非覃思冥索，未易言得，梅徵君文鼎著弧三角舉要及環中黍尺以啟發其旨趣，戴庶常震

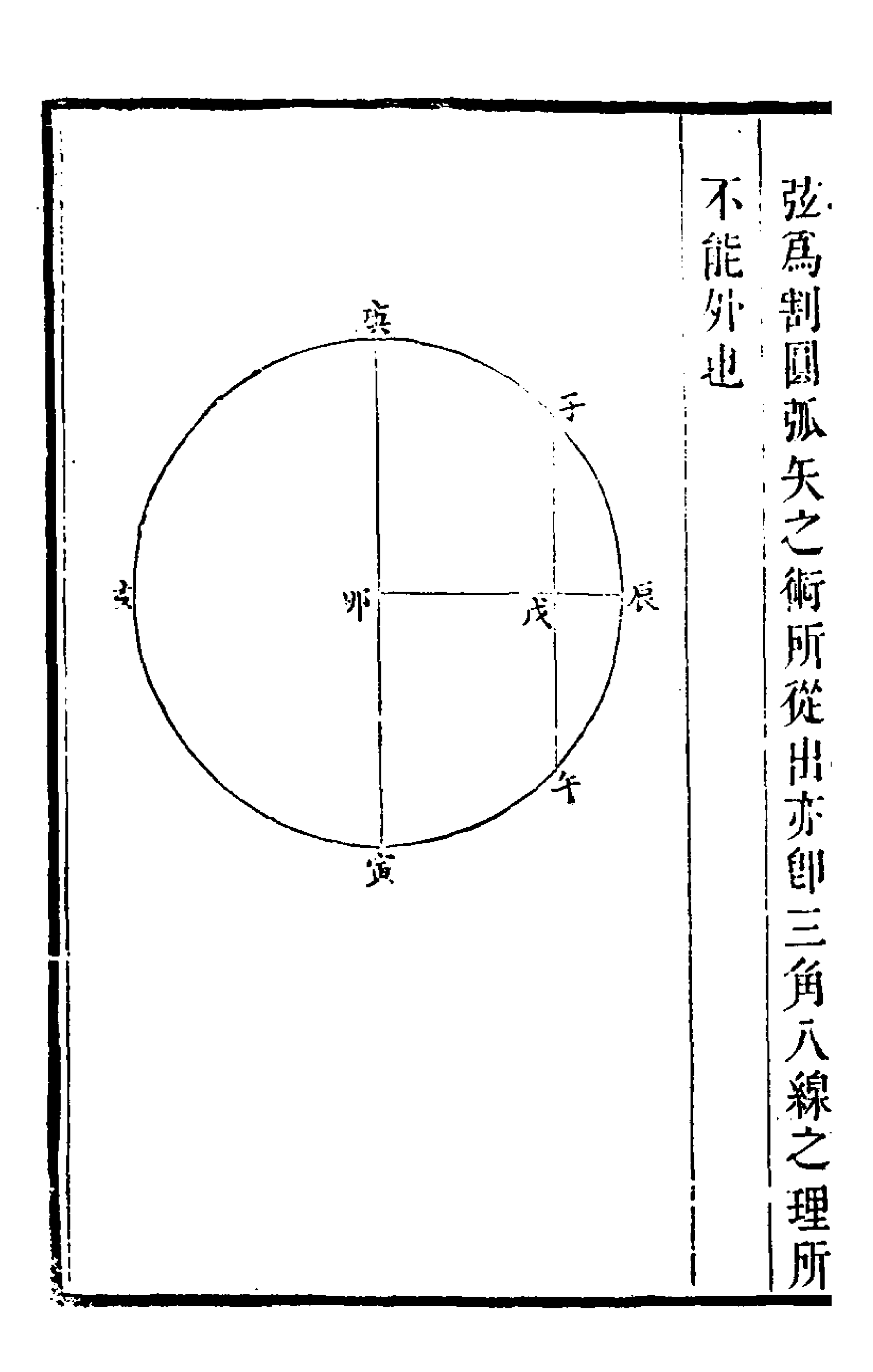
又爲句股割圜記。以衍極周髀之旨。乃梅書撰非一時。條複無次敘。戴書務爲簡奧。變易舊名。恆不易了。乾隆乙卯秋八月。取二書參之。爲釋弧三篇。上篇釋正弧弦切之用。中篇釋內外垂弧之義。下篇釋次形及矢較之術。今三年矣。或以立表之理不明。則裁弧爲弦之法不備。宜補之。嘉慶戊午秋九月。省試被落後。溫習舊業。因取昔年所論六觚八綫未成之帙。刪益爲此書上卷。而刪合原上中二卷。以爲中卷。微必求彰。期於簡要。讀梅戴兩家之書者。庶得其輗軏焉。

弧矢之術。起於方田。全圜謂之周。半其全周謂之半周。

半其半周謂之彖限凡析其周如弧則統謂之弧依弧而裁之爲稜謂之觚兩觚之間如弧之有弦者謂之弦半之爲正弦弦之中於圓者爲徑半之爲半徑

周髀算經曰數之法出於圓方圓出於方方出於矩矩出於九九八十一九九者數也以數相加減不出乎矩（趙爽云矩廣長也即所謂直線）以數相乘除不出乎方故開方句股均可以乘除之理言之由方而圜以形生形必依形以求義古人既明以圖復彖以器以形故也乃九章算術方田章有圓田弧田之術圓爲弧之合弧爲圜之分於此可見其術有周徑有半周半徑有矢有

弦爲割圓弧矢之術所從出亦卽三角八線之理所不能外也

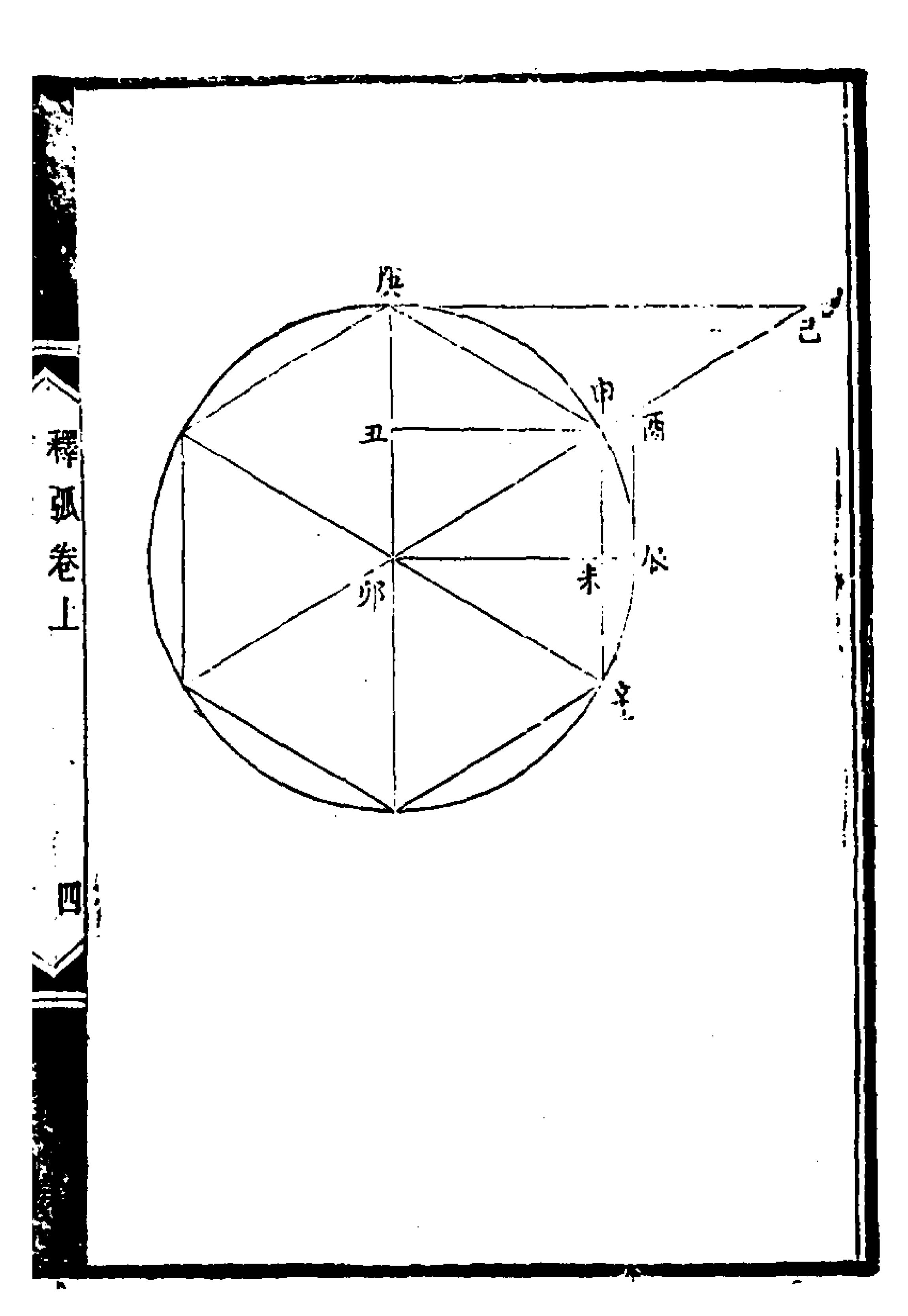


右圖辰庚亥寅爲圓周。庚辰寅爲半周。庚辰爲象限。庚卯寅爲徑。卯辰爲半徑。子辰午爲弧。子戌午爲弦。觚見下。

以半徑爲弦。其觚必六。有半徑得正弦。有正弦得餘弦。有餘弦得正切。有正切得正割。以餘弦減半徑爲正矢。四者。分象限而繫之。在本弧謂之正。在他弧謂之餘。是爲八綫。

古之圓率。徑一周三。劉氏徽曰。周三者。從其六觚之環耳。又曰。假令圓徑二尺。圓中容六觚之一面。與圓徑之半。其數均等。合徑率一而外周率三也。西法以

半徑爲一千萬與劉氏假令二尺不謀而合則不獨以徑求周必由此起卽以弧求弦又孰能外乎此哉蓋設徑爲二則半徑爲一六觚之弦卽同半徑則弦亦一也半之爲零五徵曰半面八綫則爲正弦矣於是正弦有數爲句半徑有數爲弦用弦句求股術得餘弦於是餘弦有數矣乃以餘弦爲一率正弦爲二率半徑爲三率求得四率爲正切而正切有數矣乃以正弦爲一率半徑爲二率正切爲三率求得四率爲正割而正割有數矣餘弦既爲他弧之正弦又求得他弧之切割而八綫備矣

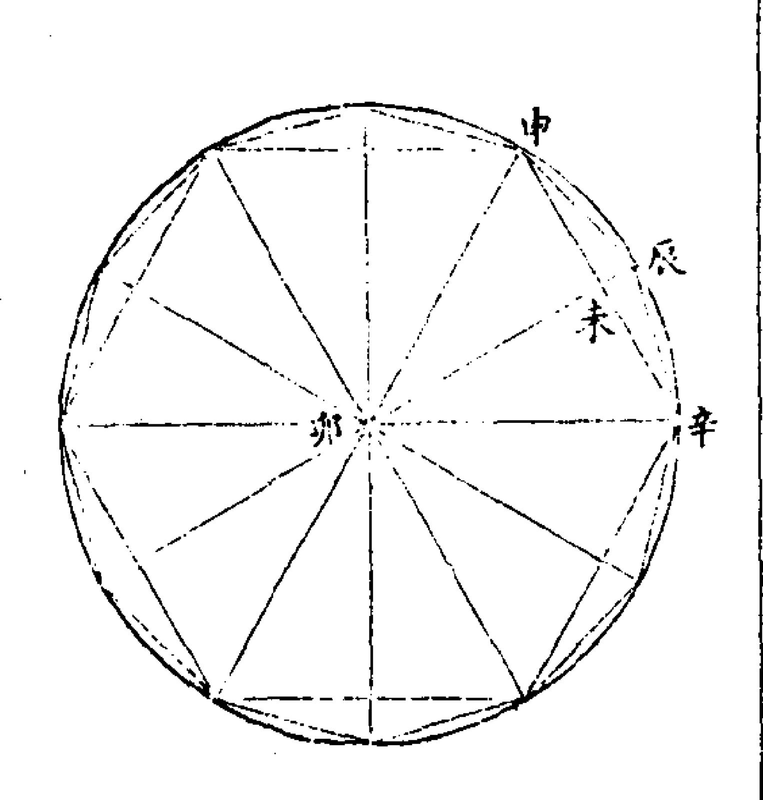

庚
己
申
酉
丑
戌
卯
未
辛

右圖申辛爲六觚之一面申未爲正弦未卯爲餘弦
酉辰爲正切卯酉爲正割未辰爲正矢申辰爲本弧
庚申爲他弧丑申爲他弧之正弦同於未卯卯己爲
餘割庚丑爲餘矢庚己爲餘切

有矢有正弦可以倍六觚爲十二可以半六觚爲三
劉氏割圜之術曰置圓徑二尺半之爲一尺即圜裏
六觚之面令半徑一尺爲弦半面五寸爲句爲之求
股以減半徑謂之小句觚之半面又謂之小股爲之
求弦即十二觚之一面也由是割十二觚爲二十四
割二十四爲四十八割四十八爲九十六西人有三

要之術其一由正弦得餘弦其二以正弦得半弧之弦即此術也其三以正弦得倍弧之弦法以半徑爲一率正弦爲二率餘弦爲三率求得四率倍之是也術雖傳自西人而其理仍割六觚爲十二觚之理耳何也六觚之餘弦即三角之中垂線而三角之中垂線即三觚之正弦若以此中垂線横畫於三角之中則三半徑變而爲三餘弦而三半徑適爲三餘弦之比例三半徑既爲三餘弦之比例則一半徑一半徑之半必爲一餘弦一餘弦之半之比例半徑之半正弦也餘弦之半倍弧之弦也故有半徑有正弦有餘

弦。而倍弧之弦得矣。均割圓之理也。



右圖。辰未為小句。未辛為小股。辰辛直線為求得弦。

卽十二觚之一面

右圖卯壬之餘弦橫之爲卯未中垂線（中垂線詳見後）錯之爲

壬未爲六觚內所容六觚之一面倍之即庚辛爲三觚之一面卯壬未三餘弦爲卯申辛三半徑之比例

卯壬丁句股形爲卯申未句股形之比例

以半徑乘六觚之弦得其斜弦則觚可以四以半徑乘六觚之正弦得其斜弦之較則觚可以十

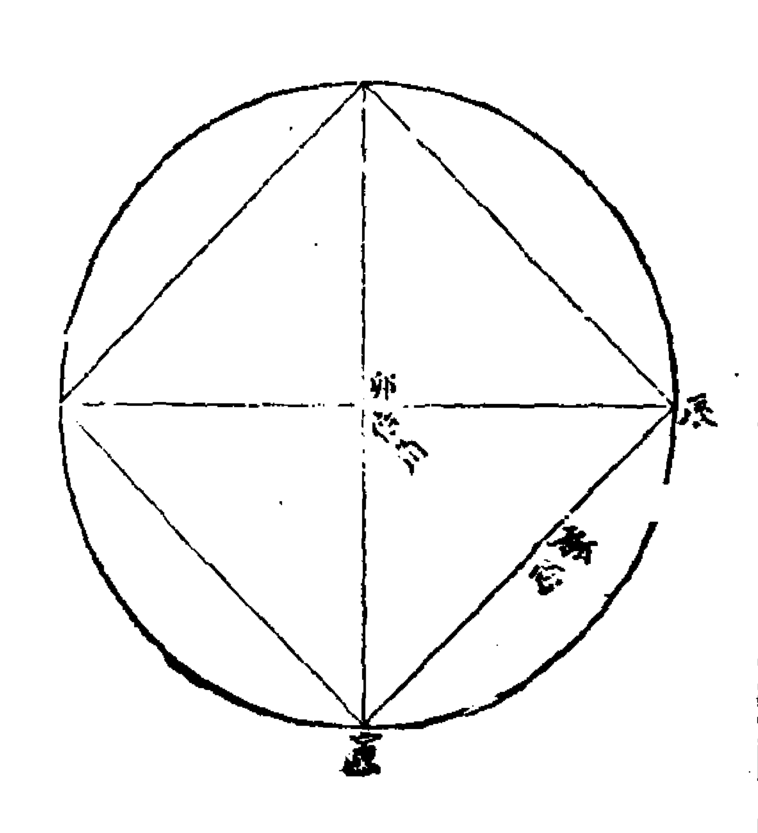
六觚之一面與兩半徑相合成三角形是形三面之度皆十三角所當之弧皆六十無庸算者也故算從此起由此變化之有二一爲半其一角以倍其一角一爲半其一角以倍其兩角半其兩角以倍其一角

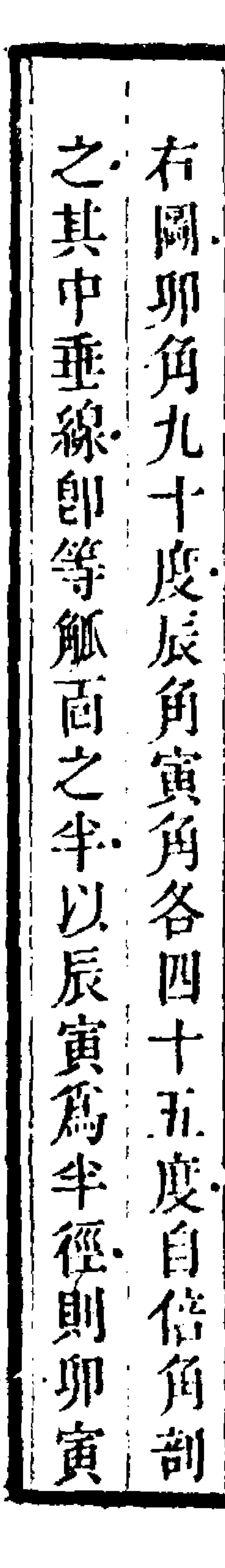
惟四分圓周之一半其一角以倍其兩角惟十分圓

周之一四分周之一者其觚兩畔所當必八分之一十分周之一者其觚兩畔所當必十分之二此二者相爲消息於六觚之面者也（凡三角之合數必如半周之數三角每角六十度合爲百八十度四觚之面九十度其餘二角所當每角必四十五度四十五度於全周爲八分之一十觚之面三十六度其餘二角所當每角必七十二度七十二度於全周爲十分之二兩三角之度合之亦百八十度）四觚兩半徑相交爲直角其觚面之細於下者適爲平方內之斜弦故用平方求弦術得之平方求弦以方邊自乘倍而開方除之今方邊即半徑而半徑即六觚之一面故半徑乘六觚之弦不啻方邊之自乘也十觚之兩半徑相交爲銳角（銳鈍詳見後）若以中垂線爲股半徑爲弦可得句爲十觚面之半然

弦有數中垂線無數則句不得而求也於是不可求以數而可求以形剖四觚之倍角（九十度之角）以垂於觚面則分一三角形為兩三角形其形適相等剖十觚之倍角（七十二度之角）以垂於半徑則分一三角形為大小兩三角形其小三角形與本形適相等既有相等之形則可以為例一三角形既分為大小兩三角形則一半徑亦分為大小兩徑其大徑等於十觚之面其小徑即可比例十觚之面小徑可比例十觚之面則大徑可比例半徑之全矣半徑與大小二徑互相比例是三率比例術之中末二率同於首率者也此理分中

末線所爲用也。梅勿菴於幾何通解中。明是術本於句弦和較相乘卽句股羃。而反復於遞加倍角之理。益角之有倍有半。猶徑之有倍有半。有角倍於角則中分倍角。而得其對邊之度。以減對邊而得大分。有邊倍於邊則中分倍邊。以其半減直角之對邊而得大分。其義一也。惟四觚之角。兩半一倍。惟十觚之角。兩倍一半。兩半一倍者。自其倍剖之。其垂線必如底之半。兩倍一半者。自其倍剖之。其垂線必如底之全。而如要之大半。要之小半。乃轉相爲底。故倍半之比例爲十觚之所專。此所以獨用理分中末線也。





右圖卯角九十度辰角寅角各四十五度自倍角剖之其中垂線即等觚面之半以辰寅為半徑則卯寅

為正弦辰卯為餘弦

右圖寅戌與子寅皆十觚之一而卯丑丑子同辰寅

半徑之半爲句。辰未半徑爲股。未寅爲弦。酉寅爲句弦較。卽戊寅十觚之一。亦卽卯丑之大分。

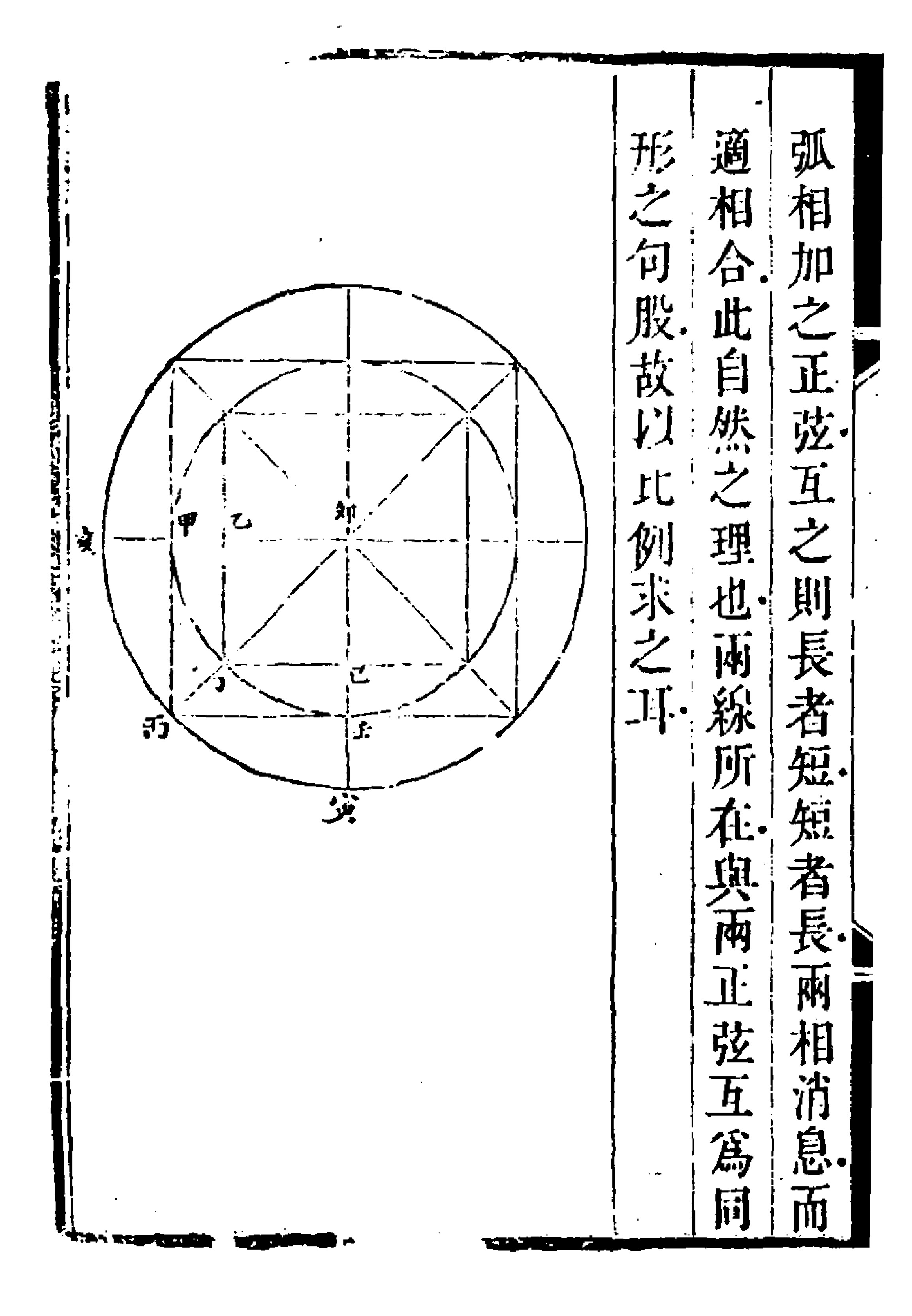
有兩弧之餘弦。各規之互得其正弦。則兩正弦相加得兩弧相加之正弦。相減得兩弧相減之正弦。其理出於圓內容方。方內容圓也

西人有二簡之法。其一用加減甚精。術以半徑與此弧正弦。例彼弧餘弦。而得四率。又以半徑與此弧餘弦。例彼弧正弦。而得四率。兩四率相加。則得此弧加彼弧之正弦。兩四率相減。則得此弧減彼弧之正弦。

試爲推其本原。凡四觚內容圓。容圓內又作四觚。內

之四觚必與半徑同度則內之正弦必當半徑之半故合內之兩正弦即得半徑半徑爲九十度之正弦合兩正弦即得半徑是旣知兩四十五度之正弦可得九十度之正弦易明者也由正方推之縱方則不獨兩四十五相加也六十度加三十度亦可得九十度之正弦四十五度加三十度亦可得七十五度之正弦也於四觚內容圓圓之所値必中垂線亦即四十五度之餘弦故推之於他數之加減亦必自餘弦規之也圓內容四觚四觚同一圓兩半面即一半徑矣兩觚不齊則兩正弦必一長一短并之必溢於兩

弧相加之正弦。互之則長者短。短者長。兩相消息。而適相合。此自然之理也。兩線所在。與兩正弦互爲同形之句股。故以比例求之耳。

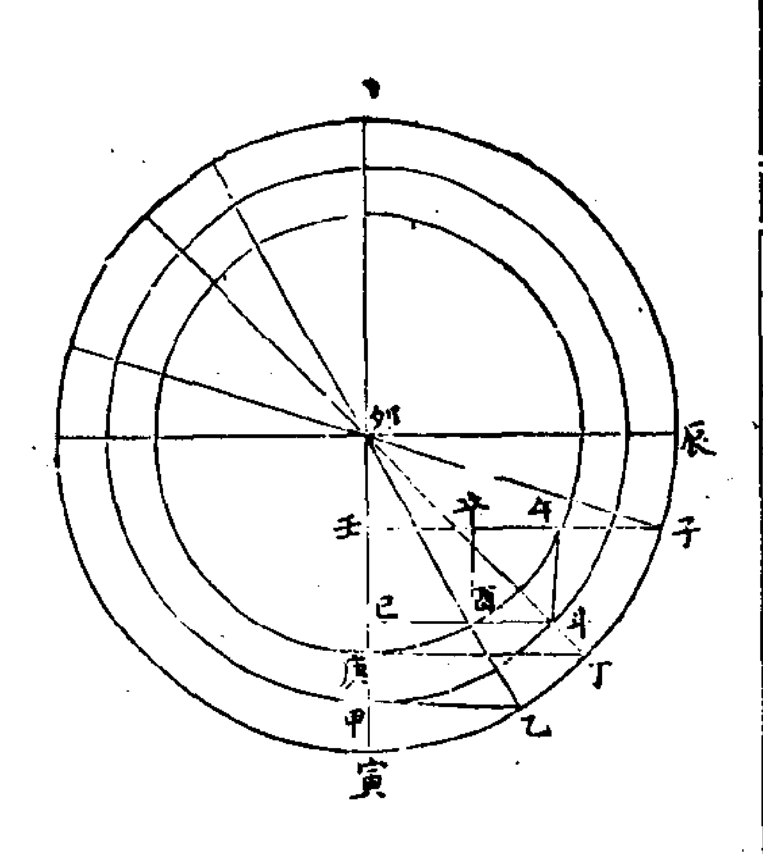


右圖甲丙丙壬兩正弦乙丁丁己容圓內兩正弦卯甲卯壬兩餘弦卯寅半徑乙丁丁己相加即卯寅相減盡仍存甲丙四十五度之正弦



右二圖前圖寅乙三十度甲乙爲正弦甲卯爲餘弦

寅丑六十度未丑爲正弦卯未爲餘弦己酉爲三十



度內互得之綫。酉斗爲六十度內互得之綫相加卽卯辰。爲半徑卽九十度正弦。相減爲午亢。卽三十度正弦。午辰與己酉等。午亢與甲乙等。自未辛作圓周於內。卯酉爲六十度餘弦者。爲未辛小圓中半徑。已酉卽爲酉辛小圓三十度之正弦。可以例寅辰大圓三十度之半徑正弦矣。卯甲爲三十度餘弦者。爲甲斗次圓中半徑。酉斗卽爲甲斗次圓六十度之正弦。可以例寅辰大圓六十度之半徑正弦矣。後圖寅乙三十度同前。寅丁四十五度。庚丁爲正弦。卯庚爲餘弦。寅子七十五度。壬子爲正弦。卯壬爲餘弦。己酉爲

三十度內互得之綫己斗爲四十五度內互得之綫相加卽壬子七十五度之弦相减爲午辛十五度之正弦卯庚爲庚午小圓半徑己酉爲正弦卯甲爲甲斗亥圓半徑己斗爲正弦與寅辰大圓之半徑正弦皆得爲例矣以餘弦比半徑未易了然以餘弦爲半徑而規之使圓則內外容圓之理與距等圈之理可相參而得矣距等圈詳見後

有所知一正弦以倍半之術推之有所知兩正弦以加減之術推之以倍半之術推之而無奇零者得矣以加減之術推之而瓜之有奇零者得矣

析圓周爲三百六十度每度作直綫與徑平行而達於左右則自一度至九十度即自二度至一百八十度也而自九十度至一百八十度猶之自一度至九十度故止得一象九十度之弦即可槩圓周三百六十度之弦也然自近於一度者弦與弧不啻平行近於九十度者弦與弧不啻旁午逐度變移不可爲定如一度二度相差約五三而十五度以後相差止四八有奇蓋一之於二相去以倍以漸而減至八十九九十則所差甚微矣非比例可得而知則必本割圓之術求其每面以爲通弦本六觚之形推之於四觚

十觚又倍之半之由三而得九三觚六觚十二觚二觚四觚八觚五觚十觚二十觚得九則加減之法可施矣蓋以度衡觚觚有無奇零者有有奇零者無奇零適當每度之數者止有十七其餘七十三皆有奇零有奇零則不可以割圓求觚亦不能以倍半之術推而得且數之自然而得者惟六觚四觚十觚每觚一半一倍故止於九其餘無奇零之觚八皆不可以倍半求者唯十五觚十八觚可由五觚六觚以三分得一之術求之餘觚六則必用加減得之雖無奇零同於有奇零者矣今逐度表之於左

一度　一百八十觚

二度　九十觚

三度　六十觚

四度　四十五觚

五度　三十六觚

六度　三十觚

七度　二十五觚十四分觚之一

八度　二十二觚半

九度　二十觚

十度　十八觚

十一度　十六觚二十二分觚之八

十二度　十五觚

十三度　十三觚二十六分觚之二十二

十四度　十二觚二十八分觚之二十四

十五度　十二觚

十六度　十一觚三十二分觚之八

十七度　十觚三十四分之二

十八度　十觚

十九度　九觚三十八分觚之二十七

二十度　九觚

二十一度　八觚四十二分觚之二十四

二十二度　八觚四十四分觚之八

二十三度　七觚四十六分觚之三十八

二十四度　七觚半

二十五度　七觚五十分觚之一

二十六度　六觚五十二分觚之四十八

二十七度　六觚五十四分觚之三十二

二十八度　六觚五十六分觚之二十四

二十九度　六觚五十八分觚之十二

三十度　六觚

三十一度　五觚六十二分觚之五十
三十二度　五觚六十四分觚之四十
三十三度　五觚六十六分觚之三十
三十四度　五觚六十八分觚之二十
三十五度　五觚七十分觚之一十
三十六度　五觚
三十七度　四觚七十四分觚之六十四
三十八度　四觚七十六分觚之五十六
三十九度　四觚七十八分觚之四十八
四十度　四觚八十分觚之四十

四十一度　四觚八十二分觚之三十二
四十二度　四觚八十四分觚之二十四
四十三度　四觚八十六分觚之一十六
四十四度　四觚八十八分觚之八
四十五度　四觚
四十六度　三觚九十二分觚之八十四
四十七度　三觚九十四分觚之七十八
四十八度　三觚九十六分觚之七十二
四十九度　三觚九十八分觚之六十六
五十度　三觚一百分觚之六十

五十一度　三觚一百零二分觚之六十
五十二度　三觚一百零四分觚之四十八
五十三度　三觚一百零六分觚之四十二
五十四度　三觚一百零八分觚之三十六
五十五度　三觚一百一十分觚之三十
五十六度　三觚一百一十二分觚之二十四
五十七度　三觚一百一十四分觚之十八
五十八度　三觚一百一十六分觚之十二
五十九度　三觚一百一十八分觚之六
六十度　三觚

六十一度　二觚百二十二分觚之百一十六

六十二度　二觚百二十四分觚之百一十二

六十三度　二觚百二十六分觚之百零八

六十四度　二觚百二十八分觚之百零四

六十五度　二觚百三十分觚之百

六十六度　二觚百三十二分觚之九十六

六十七度　二觚百三十四分觚之九十二

六十八度　二觚百三十六分觚之八十八

六十九度　二觚百三十八分觚之八十四

七十度　二觚百四十二分觚之七十六

七十一度　二觚百四十二分觚之七十六
七十二度　二觚百四十四分觚之七十二
七十三度　二觚百四十六分觚之六十八
七十四度　二觚百四十八分觚之六十四
七十五度　二觚百五十分觚之六十
七十六度　二觚百五十二分觚之五十六
七十七度　二觚百五十四分觚之五十二
七十八度　二觚百五十六分觚之四十八
七十九度　二觚百五十八分觚之四十四
八十度　二觚百六十分觚之四十

八十一度　二觚百六十二分觚之三十六

八十二度　二觚百六十四分觚之三十二

八十三度　二觚百六十六分觚之二十八

八十四度　二觚百六十八分觚之二十四

八十五度　二觚百七十分觚之二十

八十六度　二觚百七十二分觚之十六

八十七度　二觚百七十四分觚之十二

八十八度　二觚百七十六分觚之八

八十九度　二觚百七十八分觚之四

九十度　二觚

右表六十度之弦爲三等觚之一觚盡於三直線無二觚也二觚即全徑剖圓爲二有兩全徑則亦二觚耳二觚有零則三觚之不等者也凡有零皆不等之觚也遵

御製新增三分取一用益實歸除得之自三度半之爲一度半是爲九十分又半爲四十五分三三分取一得十五分又得五分又半爲二分半是爲一百五十秒又三三分取一爲五十秒乃以五十秒之弦比例得六十秒之弦是爲一分由是求之每度六十分之弦皆得矣益實歸除者以一分爲三

十分則三十分之弦必溢於一十分之弦故於一十分之原度

益之也此用以求十八邊之一而十八邊即六觚之三倍六觚邊與徑同度故以半徑為一率即以六觚之邊為一率也邊所溢之形似於三分之一之形故以為比例句讀於是設為四率相求一率加四率同於二率三倍之法若六觚以外之通弦與半徑不等則半徑雖仍為一率而一率加四率同於二率之三倍者非半徑矣故必以半徑與弧度之通弦相乘以為首率也是術於比例之形得其理而比例之率除半徑而外餘皆無數可舉故有比例而不能用惟三分首率以所分者為二率益之以求合乎首率加四率

如二率之三倍也。

此六觚子丙通弦與甲乙半徑等

此非六觚子丙通弦與甲乙半徑不等

右圖己丁乙小形。同於甲乙丙大形。乙丁底同於乙丙底。而子丙丙通弦。與子丑丑丑乙乙丙三面相較。三面

正溢一乙丁故必於子丙加乙丁三分之乃得乙丙比例之理以甲乙爲一率乙丙爲二率己乙爲三率求得四率乙丁今乙丙己乙皆無數故用益實歸除之法子丙通弦不同甲乙半徑又不可竟用子丑故以甲乙乘子丑爲首率六觚之弦同於半徑則竟以甲乙爲首率矣益實歸除之法附於左

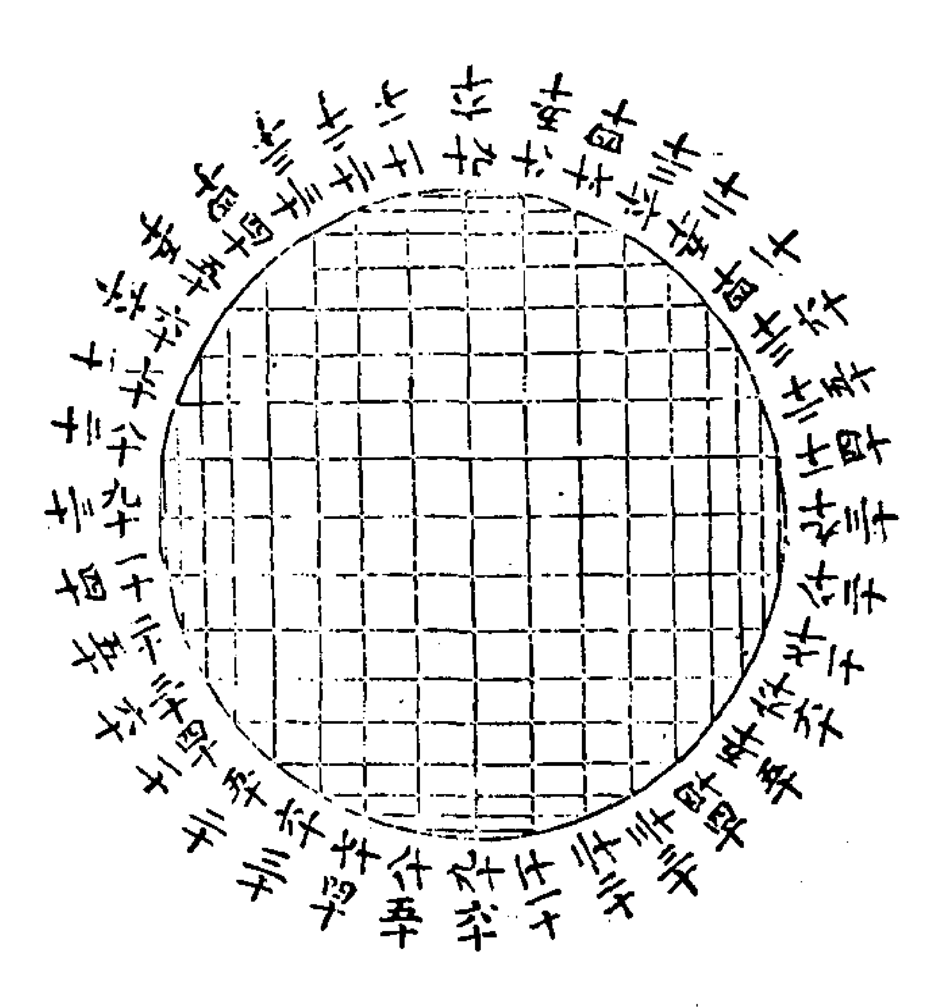
以一率自乘再乘成一立方積爲實通弦與半徑不等則以半徑自乘通弦再乘又以一率自乘三因之成三平方積爲法以法除實爲末定之二率以此二率自乘再乘益於原實內爲共實又以此末定之二率與法相乘得數減其實餘

爲第二位實又以法除之得數加於前未定之三率仍爲未定之二率復如前法求之得第三位實又以法除之得數加爲二率務令二率三倍當一率併四率之數而後二率定三率四率亦定

以六觚之形參之以四觚則一度至於三十度爲六觚之半三十一度至於九十度爲六觚之全依象限爲弦則半者弧度之弦適等於全者弧度之弦

二箇法之二以六十度內外相距等者加減相求即互得其度此理即六觚之理也試爲解之凡形之四方者必合四而成四觚形之三角等者必合六而成

六觚。六觚之半必一三角形正立。兩三角形倒垂。相衘而合爲一也。每三角形作中垂線。而橫分以弦。其正立者。弦依於六觚之面。其倒垂相衘者。弦依於半徑之橫。自中垂線而分之。弦必半於未分者之弦。不待智者知之也。依六觚之面爲弦以截之。其弦卽等於所截之邊。依其邊以爲邊。猶之平弦也。以邊所截之弦及邊與弦所截之邊。猶之平三觚也。依中垂綫而垂之。猶之垂線也。則所截之邊。必倍於所截之弦矣。平行線而得同度之形。幾何此言。實爲以形求形之至論。今列爲圖明之。



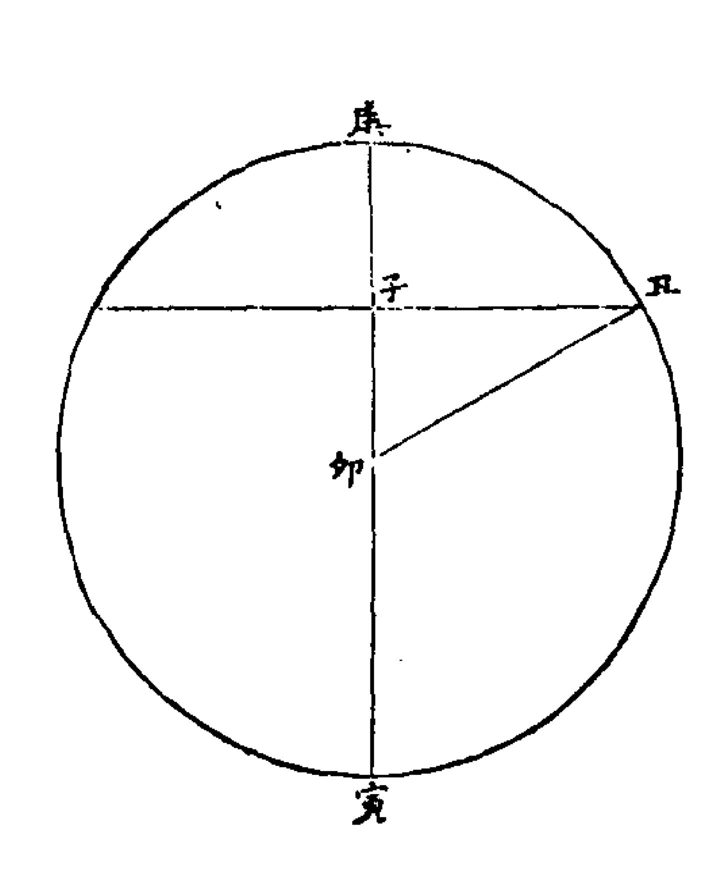
三十度至六十度。六十度至九十度。皆相距三十度。是為距弧四十度與八十度。距弧皆二十度。五十度與七十度。距弧皆十度。

心之所湊者爲角角應乎圜周之度爲角度角度滿於象限爲正角不滿爲銳角過曰鈍角銳角之弧爲鈍角之餘弧其角爲鈍角之外角鈍角之弧爲銳角之餘弧其角爲銳角之外角鈍角之弧過於象限故又曰過弧

李淳風注釋九章算術云。刻物作圭形者六枚。枚別三面。皆長一尺。攢此六物。悉使銳頭向裏。則成六觚之形。角徑亦皆一尺。更從觚角外畔。圜繞爲規。則六觚之徑。盡達規矣。然則曰角曰銳。古已名之。但李氏所謂角。仍觚耳。觚爲每面線交接處之稜。趙友欽又名爲曲。西法所云角。即李氏所云銳頭。惟有銳則有鈍矣。

矢之在銳角者爲小矢。在鈍角者爲大矢。鈍角銳角。用弦同。用矢異。弧三角每線皆弧。用止弦切。矢較之術。馭弧以平。則專於矢。

一象限止於九十度。過此則又爲一象限。度雖增而弦不出乎此限也。如九十一度之通弦。卽八十九度之通弦。一百七十九度之通弦。卽一度之通弦。故鋭角之弦。與鈍角等。鋭角主乎限内。故半徑在限内者爲矢。鈍角主乎限外。故半徑在限外者爲矢。以象限言之。則爲正矢爲餘矢。以縱橫分之也。以半周言之。則爲小矢爲大矢。以長短分之也。凡大矢減全徑得餘弦。小矢減半徑得餘弦。凡弧過半周則減半周用餘弧。限外之餘弦過三象限則減全圓用餘弧之餘弦。矢較詳見後。



右圖庚卯丑爲銳角丑卯寅爲鈍角子丑爲正弦庚子爲小矢子寅爲大矢庚丑爲銳角度丑寅爲鈍角

度。

以弦爲切。以切爲弦。以割爲半徑。以半徑爲餘弦。各依兩規之。皆同其度。是爲距等圈。測量之術以之

句股以斜者爲弦。以句股有似於弧。斜者有似於弦也。方田以直者爲弦。以圓周有似於弧。直者有似於弦也。海島算經用兩竿測高即兩句股之比例。距等圈之義。亦即幾句股層層相疊也。是圈平三角法用之。蓋平三角所求者尺寸。距等圈層層之度皆等。以相等之度比例所求之尺寸。自一寸以至百尺。或高或深。無不脗合。弧三角惟論度不論數。距等之度不

待求而自知故不用也

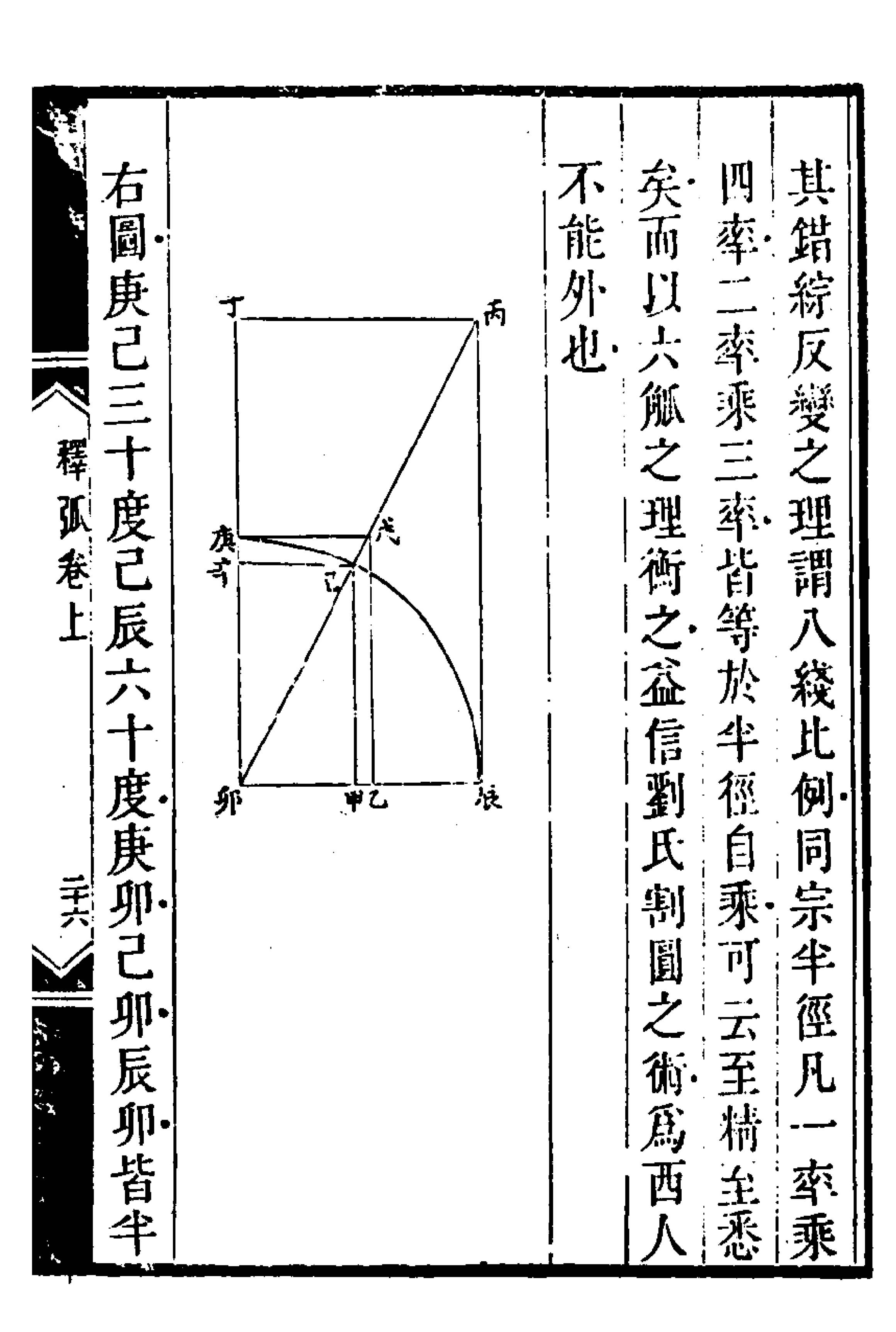
右圖甲乙丙丁四圓周即距等圈同是句也在甲爲弦在乙爲切在乙爲弦在丙爲切在丙爲弦在丁爲切

惟半徑横則爲句縱則爲股斜則爲弦倍之爲割線之準半之爲正弦之準視所合以爲之用故八線者成於六觚之半徑者也

割圓起於半徑而半徑隨弧度之分以爲之截故角之鈍鋭弦之正餘皆視乎半徑之所在以爲短長小大之則不出象限故不能逃乎半徑值乎短者小者則半徑斜就之爲弦值乎長者大者則半徑縱横合

之以爲句股。故弦之與徑。猶切之與割。亦猶徑之與餘割。割之於徑。猶徑之與餘弦。亦猶餘割之與餘切。皆自然之數也。以一六觚之形。剖而半之。則半徑必半於兩形相貫之半徑。兩形相貫之徑。即六十度之割線也。故正弦與半徑不啻半徑與餘割。由是而推之。正割之較半徑。多一圓外短線。半徑之較餘弦。多一圓內短線。弦切以圓周內外爲限。故半徑與餘弦。猶之正割與半徑。而半徑與餘切。猶正割與餘割。正弦與餘弦。亦猶正割與餘割。均可知矣。梅勿菴弧三角舉要第五卷。分相當之法九。互視之法十二。推明

其錯綜反變之理謂八綫比例同宗半徑凡一率乘四率二率乘三率皆等於半徑自乘可云至精至悉矣而以六觚之理衡之益信劉氏割圓之術爲西人不能外也



右圖庚己三十度己辰六十度庚卯己卯辰卯皆半

徑丁丙戊乙同辛己己甲皆正弦亦即餘弦卯甲辛卯同庚戊丙辰皆正切卯乙丁卯同以四率相求明之於左

正弦 辛己	半徑 己卯	半徑 丁丙	餘割 丙卯
餘弦 辛卯	半徑 卯己	半徑 庚卯	正割 卯戊
正切 戊庚	半徑 庚卯	半徑 丙丁	餘切 丁卯
正弦 己辛	餘弦 辛卯	半徑 丙丁	餘切 丁卯
餘弦 甲乙	正弦 己辛	半徑 乙戊	正切 戊庚
正割 卯戊	正切 戊庚	半徑 卯己	正弦 己辛
餘割 卯丙	餘切 丙辰	半徑 卯己	餘弦 己甲

正割卯戊　餘割卯丙　半徑卯庚　餘切卯丁

餘割丙卯　正割戊卯　半徑辰卯　正切乙卯

正弦卯甲　餘切卯乙　餘切卯丁　餘割丙卯

餘弦己甲　餘切丙辰　正切庚戊　正割戊卯

正弦卯甲　餘弦甲己　正割卯己　餘割卯丙

勿菴互視之法有他弧本弧相求九則按之前十二則已盡之但變名耳今釋於後

他弧正弦即餘弦　他弧餘弦即正弦　他弧餘割即正割

他弧正割即餘割　他弧正切即餘切　他弧餘切即正切

門人汪昌序校字
男　廷琥

釋弧卷中

江都焦循學

平三角自內以例外。弧三角自外以例內。內弧之度。成於半周。與距等圈之度異。距等之周。本小於圓周。小周大周同度。故以大當大。以小當小。亦同度。兩半周之大同。而兩徑之間。一當大。一當小。則其度遂不同矣。蓋平三角所求者尺寸。必以度與尺寸相比例。故同度之中。而有不同。弧三角所求者角度。自一度以至半周。不出大弧之內。故不同度之中。而有同焉之理也。

右圖子乙爲距等圈庚乙寅爲半周同於庚辰寅戊卯半徑所截在距等圈則子辛子甲爲弦在半周則癸丙癸己爲弦子乙與戊辰大小同度癸乙與戊辰

大小不同度。

平三角所以測平圓也。弧三角所以測渾圓也。渾圓之周。等於平圓。其綫之帀於渾圓者。皆爲圓周。半之皆半周。半周之縱絡者曰經。距等圈之横亘者曰緯。爲緯綫者爲經度。爲經綫者爲緯度。

大戴禮云。南北爲經。東西爲緯。經之半周。所以有百八十度者。緯綫成之也。緯之半周。所以有百八十度者。經綫成之也。以綫言之。則縱爲經而横爲緯。以度言之。則縱爲緯而横爲經。求黃赤道之度。卽求北極剖分之三百六十綫也。求過極經圈之度。卽求黃赤

距緯之距等圈也。今恐易於惑人。惟以弧角言之。而辨明於此。

緯線即距等圈

線以曲而成弧。弧以交而成角。弧之去角適當半徑者。為角度。不合者。為弧度。正角用半徑。鈍角銳角各用其弦切。渾圓之弦切。即平圓之弦切也

右圖癸乙午亥乙辰庚丙寅皆半周相交成甲乙丙三角形卽弧三角也癸辰爲乙角度丙甲爲弧度午寅爲丙角度乙甲爲弧度庚亥爲甲角度乙丙爲弧度

渾圓之羃弧有短長爲弧則遇爲弦則遶各主一周互爲高下欲知其端必辨厥角角之在心者切所集也角之近極者弦所湊也在心者兩經兩緯之交也近極者經緯之斜交也經緯之正交者正角也正角居半徑之閒從乎縱則成切從乎横則成弦故對弧之切連於右弧之弦右弧之切連於左弧之切左弧之弦連於對弧

之弦。皆因諸其角也。

平圓半徑。以每度分之。則有三百六十。皆自心達於周。渾圓之周。以徑線分之。則有三百六十。每周半徑三百六十。共得半徑一十二萬九千六百。皆自心達於渾圓之羃。每周內弧線滿乎九十度。則兩平圓相衡共一半徑。若不及九十度而有弧以截之。則自所截之處。必交爲二角。此二角之弦。必行於心之外。羃之內。隨所截之多寡。以爲高下。切線皆在羃外。總之每一弧。卽爲一平圓周之所截。三弧雖合成一三角形。其實爲三平圓之周所成。故各依平圓周爲切爲

弦必不能相交而成三角矣。經與經交。緯與緯交。必居正中。經交在赤道之中緯交在兩極之中經緯十字相交。必爲正角居經角緯角之偏。自一度以至九十度其經緯斜交在經角必近兩分。在緯角必近兩極。自心旁行。由高向下。故綫浮羃外爲切。由側向心。故綫行渾圜體中爲弦。正角一旁。由高向下。一旁由側向心。故一綫在外。一綫在內也。對弧左弧右弧之稱。以所知之角定之。而角度與對弧爲一例。其左右之弧。卽與角度之兩半徑爲例。大約對弧之弦切與角度之弦切爲例。其左右弧之當正角者。與半徑餘弦爲例。其左右弧之當銳角者與半

徑正割爲例正角則恒爲半徑之例也

測量全義第七卷第一題下有圖爲赤道卽右亥甲辰半周爲黃道卽右午丙癸半周爲極至交圈卽右庚辰寅亥全周二分爲心則兩至爲合度爲過極經圈卽右庚丙寅半周爲黃赤距度之垂綫成弦切割餘弦卽右癸辰度之戊辰切癸巳弦卯癸割卯己餘弦自黃道垂綫爲經圈正弦又垂綫爲黃弧正弦卽右丙辛丙丑兩正弦自赤道作綫上行爲經圈正切又旁行爲赤弧正弦卽右子甲切與甲壬弦以赤弦合經切爲半徑與角切之比例以黃弦合經弦爲半徑與角弦之比例梅氏弧三角舉要以雅谷所圖闕黃赤二弧之切則舉

角可以求弧,舉弧不可以得角,乃補二綫爲乙未爲乙酉,圖之有此二切,可以爲半徑餘弦之比例,可以爲正割半徑之比例,正弧三角於此盡矣,乃雅谷於經弦黃弦之端,與赤弦經切之端,作虛綫連之,爲直綫直角形即句股形弧二角舉要因之爲五句股,以明其相似,又取九章商功之塹堵鼈臑,明立三角之理,蓋自弧言之爲弧三角,自弦割半徑言之,則爲立三角,觀其裏可知其表也,戴東原句股割圜記本之爲立三角三成圖,一成兩切也,二成一弦一切也,三成兩弦也,以赤爲句,以經爲股,以黃爲弦,兩切爲弦句,加以虛

股兩弦爲弦股加以虛句一弦一切爲句股加以虛弦亦緣全義舉要之圖分析明之以盡其致也循謂黃赤兩道夾經綫之弧爲角度則自一度以至九十度其度移則相距之經度亦移多寡均可以相例則乙丙甲之三弧等於乙癸辰之三弧其相似而可爲比例也不待辨而自見惟平圜八綫之法所以用弦切者固以曲綫不可算必直之而後可算也直之而後算則任以一半徑爲底直其內爲弦直其外爲切此自然之理也有弦則短半徑以就之爲餘弦有切則續半徑以就之爲正割亦自然之理也今三弧皆

曲綫。其不可算。猶之乎平圜之一弧也。如卯癸辰止癸辰一弧爲曲綫皆曲綫而欲算之。必皆直之爲弦切無惑也。其乙癸辰之三弧。乙癸乙辰。皆滿弧限。皆以半徑爲弦。與心與角度無高下之不齊。故其端相遇。然黃弦卯癸。與角弦癸巳爲弦股。則赤弦卯辰。即不可以爲句。赤弦卯辰。與角切戊辰。爲句股。則黃弦卯癸。即不可以爲弦。黃弦卯癸。與赤弦卯辰爲弦句。則角之弦切。均不可以爲股。所有之餘弦正割。仍癸辰角度之半徑所成。非增損黃赤兩弦以就之也。因角度應有之半徑與黃赤之弦適合。故槩曰用半徑。不知同一半徑而各

有所主也．如以酉乙黃切．例卯癸半徑．以乙未赤切．

例卯巳餘弦．此半徑爲乙癸之弦．餘弦自屬角度癸

辰．與乙辰之弦無涉．以卯辰半徑．例赤切乙未．以卯

戊正割．例黃切酉乙．此半徑爲乙辰之弦．正割自屬

角度癸辰．與乙癸之弦無涉．此卯戊正割．卯巳餘弦．

與戊辰正切．癸巳正弦爲一類．不屬諸黃赤兩弦．顯

然可見．既爲緯度所截．成乙丙甲三弧．而每弧皆曲．

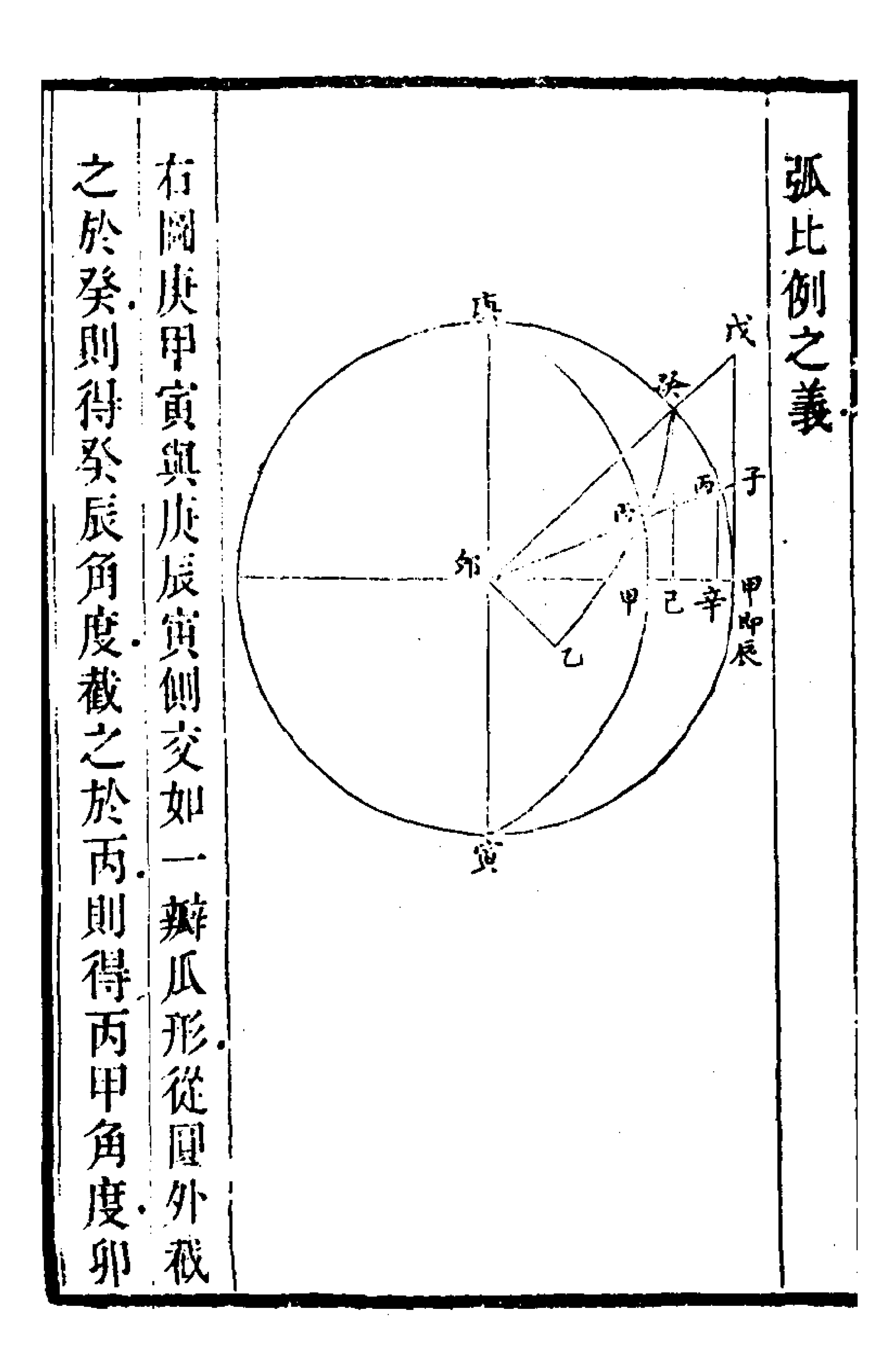
猶之乙癸辰三弧．每弧皆曲也．乙癸乙辰滿限．用半

徑爲弦．截爲乙丙乙甲．不滿象限．自當別爲弦切．試

自乙丙丙甲甲乙三弧各剖爲平圜．則各有半徑．卯丙卯甲

卯乙各有餘弦。卯辛卯丑卯壬各有正割。卯子卯酉卯未與角度等又何詫於黄赤兩弧之切出於體外哉。其酉乙與乙未連不與子甲連。猶卯癸與卯辰連不與戊辰癸巳連也。其丙丑與丙辛連不與甲壬連。猶卯癸與卯己連不與卯辰連也。子甲與甲壬連不與丙丑連。猶戊辰與辰連不與卯癸連也。惟其有一綫之不連。此半徑之或與弦用。或與切用。所以各有指歸。而乙丙甲三弧之弦切。不能漫取爲例。亦於是乎定。故相似比例之義。觀乙癸辰與乙丙甲兩形可見。設爲虛綫轉令炫矣。今不以立三角明之。而廣諸半周爲全圓。以明三

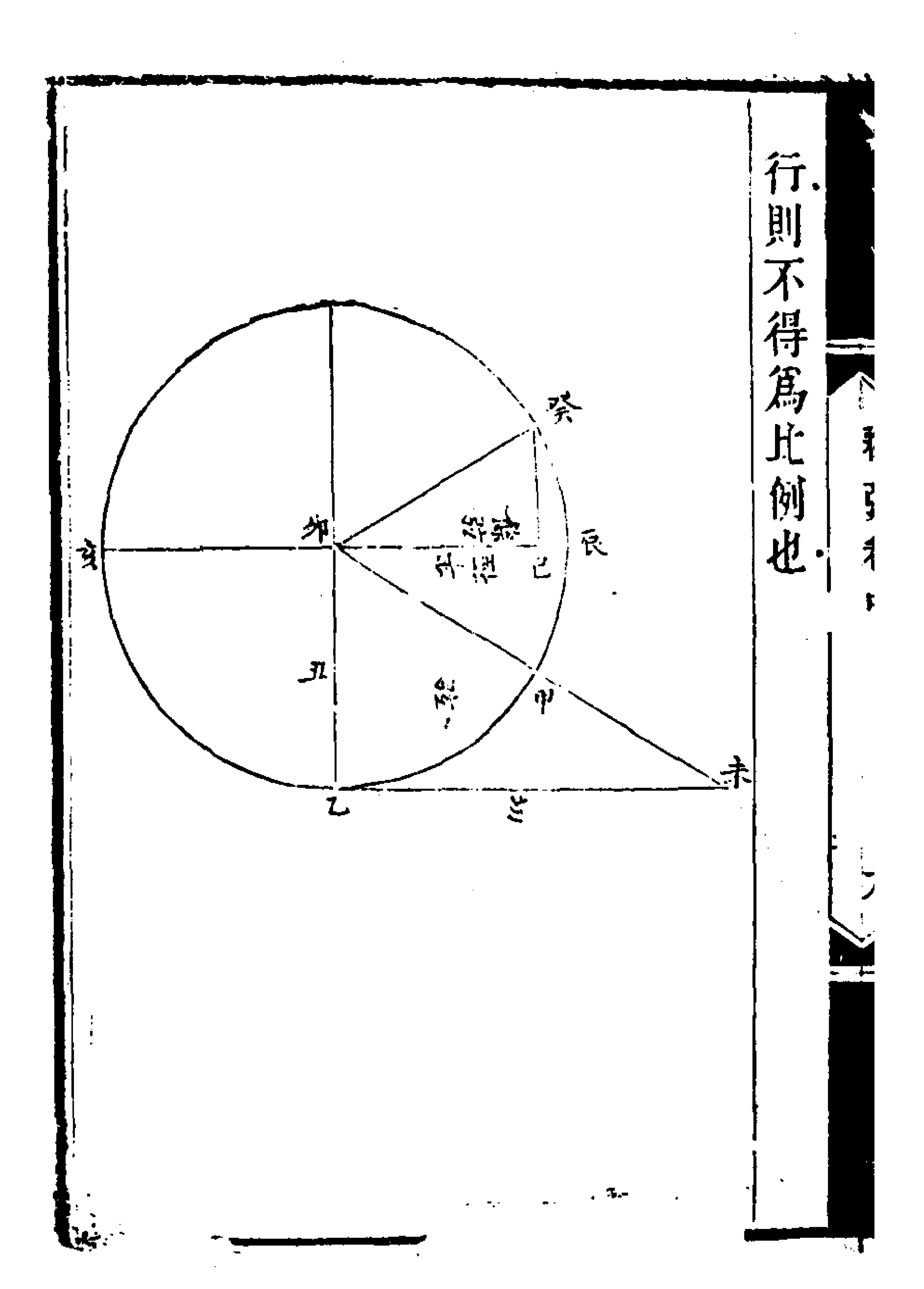
弧比例之義

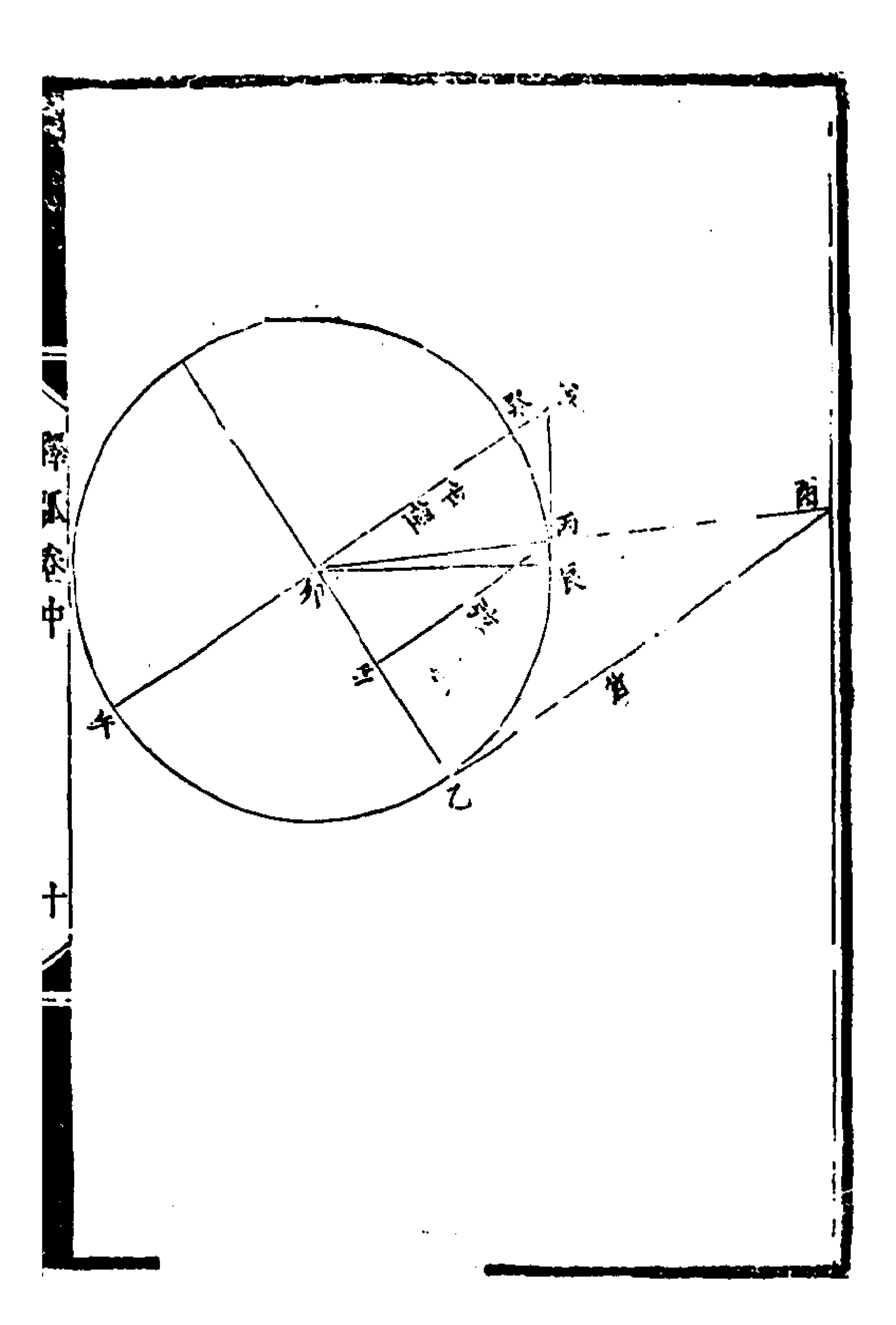


右圖庚甲寅與庚辰寅側交如一瓣瓜形從圜外截之於癸則得癸辰角度截之於丙則得丙甲角度卯

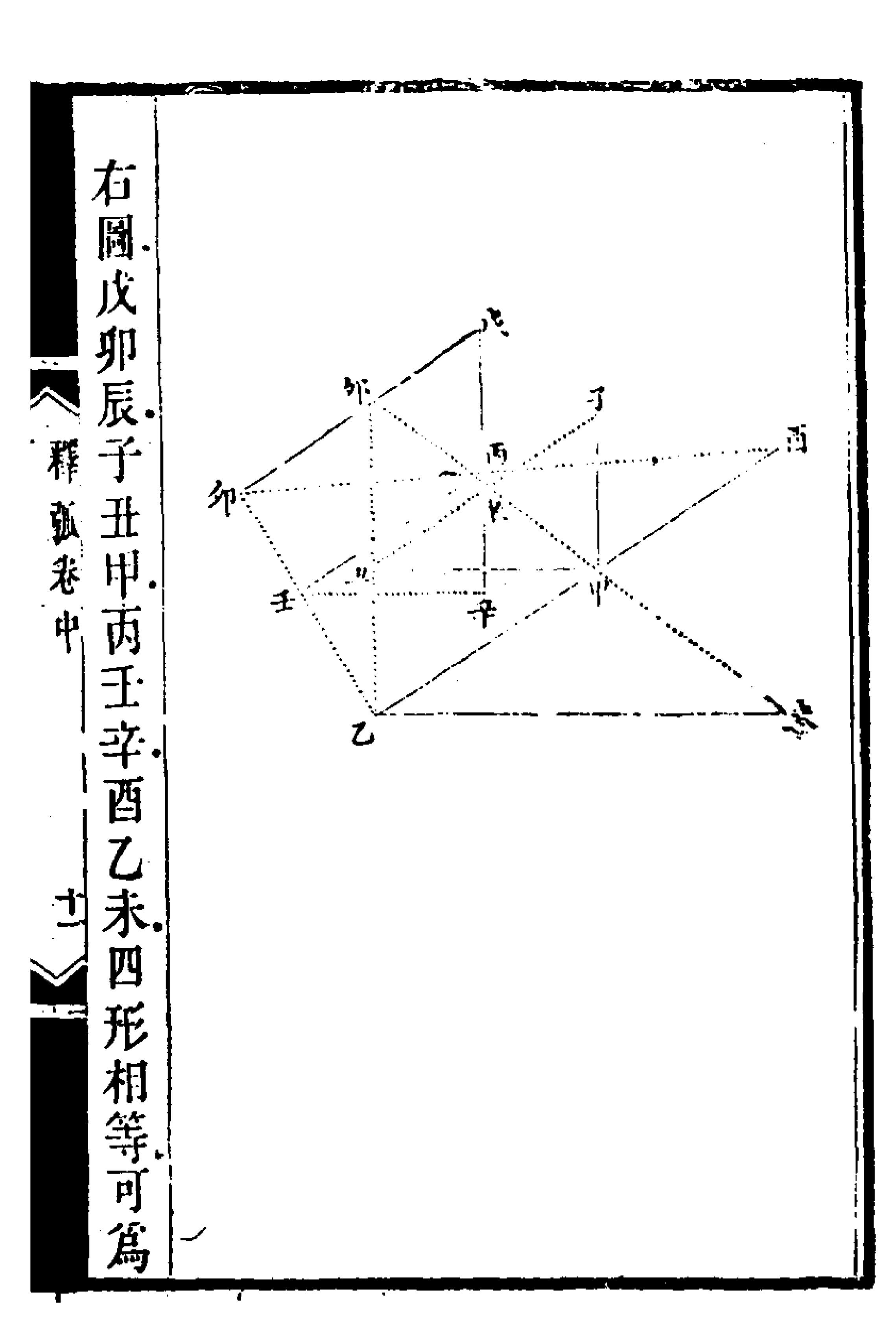
丙與卯癸同是半徑也庚甲與庚辰同是象限也剖庚辰寅爲平圓而卯癸截之剖庚甲寅爲平圓而卯丙截之其爲角度其有弦有切有割無不同而卯癸所截之癸辰得稱角度卯丙所截之丙甲不得稱角度何也弧三角以弧線爲主所以截自癸者以癸乙弧交庚辰於癸也截自丙者以癸乙弧交庚甲於丙也乙癸滿一象限乙丙不滿一象限故丙甲在平圓內是角度而在弧線不得爲角度也惟其在平圓內是角度伸丙甲合諸癸辰則子甲切猶之戊辰切丙辛弦猶之癸巳弦得爲比例卯戊割與卯子割不平

行則不得爲比例也




癸
戊
赤道
丙
酉
甲
辰
壬
午
乙

右二圖俾甲乙弧爲辰乙亥平圓合諸癸辰弧之平圓。則乙未正切。丑甲正弦。與卯辰半徑平行。卽與卯己餘弦平行。故乙未切。丑甲弦。得與卯辰半徑。卯己餘弦爲比例。而卯未割線。不與卯癸割線平行。因而卯乙半徑。亦與癸辰弦線相差。均不可爲比例矣。俾丙乙弧爲癸乙午平圓。合諸癸辰弧之平圓。則乙酉正切。壬丙正弦與卯癸半徑平行。卽與卯戌割線平行。故乙酉切。壬丙弦。得與卯癸半徑。卯戌割線爲比例。而卯酉割線。不與卯辰半徑平行。卯乙半徑不與戌而切線平行。不可爲比例矣。



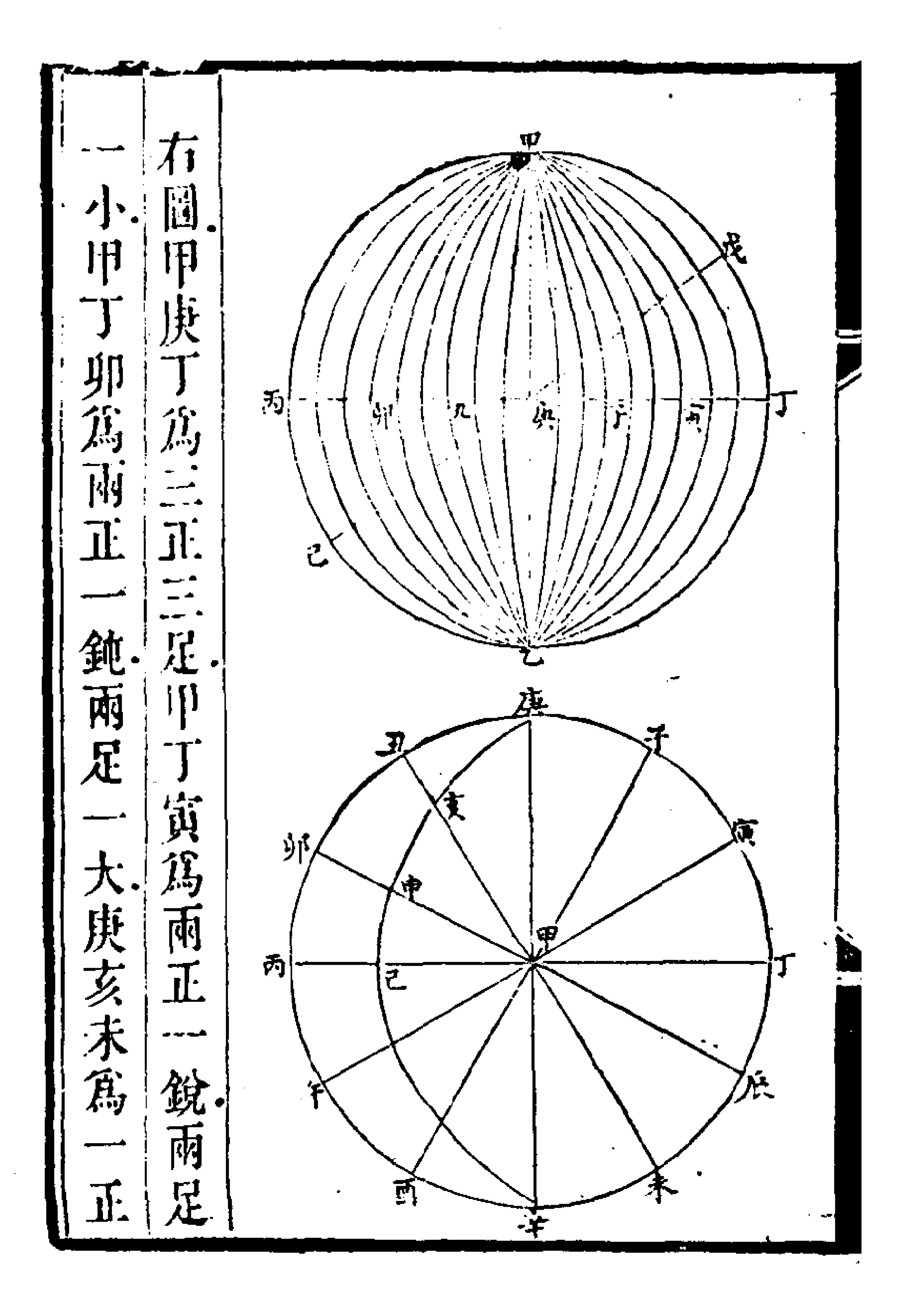
右圖戊卯辰子丑甲丙壬辛酉乙未四形相等可爲

比例。酉卯乙未卯乙。與戊卯辰不相等。故不可爲比例。子甲爲丙甲弧之切。甲丑爲甲乙弧之弦。合之以例。戊丙與丙卯。丙辛爲丙甲弧之弦。丙壬爲丙乙弧之弦。合之以例丙戊與戊卯。酉乙爲乙丙弧之切。未乙爲甲乙弧之切。合之以例戊卯與卯辰。觀於此圖。而弧三角比例之理。如視掌矣。

角度在經。則經之弧皆正角。度在緯。則緯之弧皆正。緯線不爲角而爲弧。則交於緯之正弧者爲斜弧。經線不爲角而爲弧。則交於經之正弧者爲斜弧。有兩正弧。乃有一正角。有正角。而後半徑可用也。

凡弧三角。三角正三弧足者。兩正角兩足弧者。均無俟算而自知。其待算者。或正角一。鈍角二。或正角一銳角二。或正鈍銳各一。或大弧二小弧一。或三弧並小。皆謂之正弧。正弧者。弧之正行不斜之謂也。三正角。兩正角。既不用算。三鈍三銳。及二鈍一銳。二銳一鈍。並為斜弧之角。故正弧之角。止於三類。三足弧兩足弧。既不用算。三大弧為三鈍之弧。二大二小。必無足弧。二小一大。二大一小。均必兩銳一鈍。皆斜弧之弧。故正弧之弧。止於二類。其兩銳兩鈍。又有同度不同度之分。而比例之法一也。

右圖甲庚丁為三正三足甲丁寅為兩正一銳兩足一小甲丁卯為兩正一鈍兩足一大庚亥未為一正



二鈍庚亥丑為一正二銳亥辛未為正銳鈍各一庚申辰為二大弧一小弧庚申卯為三小弧兩緯交則角度在經如戊丁是也丁丙為緯正弧與甲丁甲寅等經線交皆成正角戊己於丁丙為斜弧若經線所交以緯為角如丁寅子卯之類則庚又為丁甲丙之極而已庚之斜弧為正弧甲寅甲子甲丑甲卯諸正弧又為斜弧矣

角度對弧求右弧

一率角度切　二率對弧切　三率半徑　四率右弧弦

角度對弧求左弧

一率 角度弦　二率 對弧弦　三率 半徑　四率 左弧弦

角度右弧求對弧

一率 半徑　二率 角度切　三率 右弧弦　四率 對弧切

角度左弧求對弧

一率 半徑　二率 角度弦　三率 左弧弦　四率 對弧弦

角度右弧求左弧

一率 角度餘弦　二率 半徑　三率 右弧切　四率 左弧切

角度左弧求右弧

一率 角度正割　二率 半徑　三率 左弧切　四率 右弧切

對弧右弧求角度

一率右弧弦　二率對弧切　三率半徑　四率角度切

對弧左弧求角度

一率左弧弦　二率對弧弦　三率半徑　四率角度弦

右弧左弧求角度

一率右弧切　二率左弧切　三率半徑、四率角度正割

斜弧之垂線曰垂弧。在內曰形內垂弧。在外曰形外垂弧。角兩銳。上鈍角而內垂。得正角二。上銳角而內垂得正角一。一正角。不可以算。故上鈍角必內垂。上銳角必外垂。上鈍角。則下之類同也。上銳角則下之類異也。

九章算術題云。今有圭田。廣十二步。正從二十一步。

圭田即三鋭角形正從者中垂線也有中垂線則分爲兩句股故半其廣而以正從除之化三角爲句股之理已發蒙於是蓋兩句股相背三鋭角也有全形闕半者一鋭角一鈍角居於下也合者分之作其股於中則爲中垂線闕者補之作其股於外爲外垂線三角均鋭爲中垂無疑惟兩鋭一鈍則或中或外不可豫定何也凡三角必剖爲兩句股以兩鋭向下其上或鋭或鈍自中剖之兩形皆句股若一鋭一鈍向下其上之鋭角不能居正中而斜偏於一畔依鈍角中垂則必不能得兩句股故宜自鋭下垂處作一小

句股以補成一大句股測量全義云凡底邊兩旁角爲同類垂弧在形內若異類垂弧在形外勿菴以兩鈍雖同類不可以內垂兩鈍一銳雖異類不可以外垂然兩鈍一銳必用次形次形之內垂外垂仍不外同類異類之例也

垂弧之法非別有術也垂弧者所以欲得正角也斜弧無半徑徑用之不得斜弧得正弧矣得正弧斯得斜弧矣

粟米章法賤實貴之術不可以平除而先以平除得之然後加減得其貴賤斜弧之理亦如是耳先得正

弧或在形外或在形內皆得諸自然既得而以形名之故謂之垂弧有垂弧而更求斜弧猶平除而後得貴賤也

垂弧之法無定角也視其所舉也舉兩角一弧則垂於不舉之角舉兩弧一角則垂及於不舉之弧連角之弧其不連之端弧之所垂也內垂之法得其半而求其半外垂之法得其全而用其虛

內垂惟一角分爲兩角一弧分爲兩弧與原角原弧不同其左右之兩角兩弧則與正角共之也故隨取兩畔之一角一弧合正角求之得中線外垂之鈍角

廣而為正角。一銳角因垂線增之。一弧設於形內。一弧增長。皆與於原角原弧。其餘一弧一角。則與正角共之。故合正角求之得外線。

正弧之法。舉二可得。有正角也。斜弧之法。舉二不可得無正弧也。

求正弧者。有一弧一角。或兩弧合正角為三。斜弧必舉兩弧一角。或兩角一弧。其故何也。一弧一角合正角求得垂線。又必有一弧或一角合此垂線及正角。乃可得其斜也。

平角之垂。例以正弦。弧角之垂。例以半徑。平角之垂有

三邊而角可得也。弧角之垂有三邊而不等則角不可得也。

三弧求角之法。可施於正弧。弧若斜弧。惟三弧中有二一弧相等者。而後可。蓋正弧有三弧。任取二弧。與正角合求。則得角。斜弧之三弧。自中作垂線。則兩形均止一弧。與正角同其底。弧中分為二。惟兩要之弧相等。則垂弧所折半之底弧。亦相等。故可分底弧之半。與正角及所知之弧。求得角也。苟兩要有大小。則底弧為垂弧所分者。亦有大小。其數不可知矣。

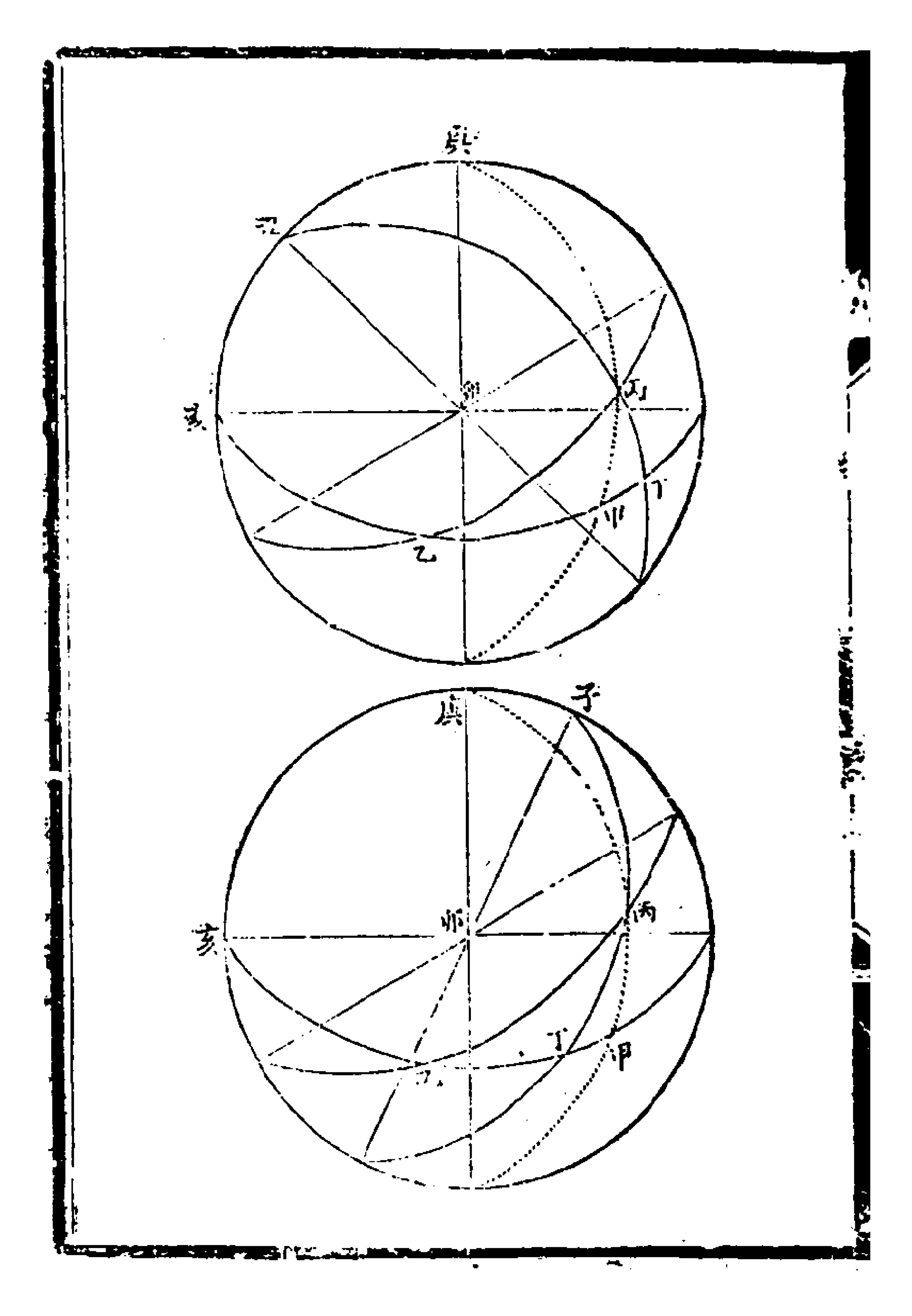
平角之垂。有一鈍角。無兩鈍角。垂線得而盡也。弧角之

垂。有二鈍角。有三鈍角。垂弧不得而窮也。惟兩鋭角而後成平角之形。惟平角而後得弧角之度。

弧線皆曲。故有二鈍三鈍之角。弧必改爲弦切。則亦平三角矣。兩鈍三鈍之綫。在平角必不能成三角形。故弧角之兩鈍三鈍者。不可改爲平三角形。卽不可作垂弧也。

正從卽中垂線

外垂線


丁
乙
子
庚
亥
卯
丙
丁
甲

右圖甲爲正角甲丙乙爲正弧三角易甲爲丁則變爲斜弧三角丁爲鋭角則丙甲爲形內垂弧丁爲鈍角則丙甲爲形外垂弧庚甲亥如庚卯亥丑丁亥如丑卯亥子甲亥如子卯亥觀此正鋭鈍可見乙角乙丙弧爲甲乙丙正弧三角之所有亦即爲乙丙丁斜弧三角之所有故據此可求得正弧有正弧以爲之推移斜弧可求得矣今用甲乙丙丁爲識表其算例於左

有乙角有乙丙弧有丁丙弧求乙丁弧

先以乙角甲角乙丙弧求得丙甲弧又求得乙甲弧

次以甲角。丁丙弧。丙甲弧。求得甲丁弧。次以乙甲弧
併甲丁弧。得乙丁弧。

有乙角。有乙丙弧。有乙丁弧。求丁丙弧。

先以乙角。甲角。乙丙弧。求得丙甲弧。又求得乙甲弧
次以乙甲弧。減乙丁弧。得甲丁弧。次以甲角。甲丁弧。
丙甲弧。求得丁丙弧。

有乙角。有丙角。有乙丙弧。求乙丁弧。

先以乙角。甲角。乙丙弧。求得丙甲弧。又求得乙丙半
角。又求得乙甲弧。次以乙丙半角。減丙角。得丁丙半
角。次以丁丙半角。甲角。丙甲弧。求得甲丁弧。次以乙

甲弧．併甲丁弧．得乙丁弧．

有乙角．有丙角有乙丙弧．求丁丙弧

先以乙角甲角．乙丙弧．求得丙甲弧．又求得乙丙半角．次以乙丙半角．減丙角得丁丙半角．次以丁丙半角甲角．丙甲弧．求得丁丙弧．

有乙角．有丁角．有乙丙弧．求乙丁弧．

先以乙角．甲角．乙丙弧．求得丙甲弧．又求得乙甲弧．次以丁角．甲角．丙甲弧．求得丁甲弧．次以丁甲弧．併乙甲弧．得乙丁弧．

有乙角．有丁角．有乙丙弧．求丁丙弧．

先以乙角甲角乙丙弧求得丙甲弧次以丙甲弧丁角甲角求得丁丙弧

有乙角有乙丙弧有乙丁弧求丙角

先以乙角甲角乙丙弧求得丙甲弧又求得乙甲弧次以乙甲弧減乙丁弧得甲丁弧次以甲丁弧丙甲弧甲角求得丁丙半角次以乙甲弧乙丙弧甲角求得乙丙半角次以乙丙半角併丁丙半角得丙角

有乙角有乙丙弧有乙丁弧求丁角

先以乙角甲角乙丙弧求得丙甲弧次以丙甲弧乙丙弧甲角求得乙丙半角次以乙丙半角乙丙弧甲

角。求得乙甲弧。次以乙甲弧。減乙丁弧。得甲丁弧。次以甲丁弧。丙甲弧。甲角。求得丁角。

有乙角。有乙丙弧。有丁丙弧。求丙角。

先以乙角。甲角。乙丙弧。求得丙甲弧。又求得乙丙半角。次以丙甲弧。丁丙弧。甲角。求得丁丙半角。次以丁丙半角。并乙丙半角。得丙角。

有乙角。有乙丙弧。有丁丙弧。求丁角。

先以乙角。甲角。乙丙弧。求得丙甲弧。次以丙甲弧。丁丙弧。甲角。求得丁角。

有乙角。有丁角。有乙丙弧。求丙角。

先以乙角甲角乙丙弧求得丙甲弧又求得乙丙半角次以丙甲弧甲角丁角求得丁丙半角次以丁丙半角併乙丙半角得丙角

有乙角有丙角有乙丙弧求丁角

先以乙角甲角乙丙弧求得丙甲弧次以丙甲弧乙丙弧甲角求得乙丙半角次以乙丙半角減丙角得丁丙半角次以丁丙半角丙甲角甲角求得甲丁弧次以甲丁弧丙甲弧甲角求得丁角

形內垂弧 按所舉乙角乙丙弧故以乙角爲本角若所舉丁角丁丙弧則丁角爲本角矣若乙角與乙丁弧垂舉或與丁丙弧垂線則垂弧垂在丁

有乙角有乙丙弧有丁丙弧求乙丁弧

先以乙角甲角乙丙弧求得丙甲弧次以乙角甲角丙甲弧求得乙甲弧次以丁丙弧丙甲弧甲角求得甲丁弧次以甲丁弧減乙甲弧得乙丁弧

有乙角有乙丙弧有乙丁弧求丁丙弧

先以乙角甲角乙丙弧求得丙甲弧又求得乙甲弧次以乙甲弧減乙丁弧得丁甲弧次以丁甲弧丙甲弧甲角求得丁丙弧

有乙角有丙角有乙丙弧求乙丁弧

先以乙角甲角乙丙弧求得丙甲弧次以乙角甲角

丙甲弧求得乙甲弧。次以乙甲弧。丙甲弧。甲角。求得
丙全角。次以丙全角減丙角。得丙半角。次以甲丙弧
丙半角。甲角。求得丁甲弧。次以丁甲弧。減乙甲弧得
乙丁弧。

有乙角。有丙角。有乙丙弧。求丁丙弧。

先以乙角。甲角。乙丙弧。求得丙甲弧。次以丙甲弧。乙
丙弧。甲角。求得丙全角。次以丙全角減丙角。得丙半
角。次以丙半角。甲角。丙甲弧。求得丁丙弧。

有乙角。有丁角。有乙丙弧。求乙丁弧。

先以乙角。甲角。乙丙弧。求得丙甲弧。又求得乙甲弧。

次以丁角減半周得丁外角次以丁外角甲角丙甲弧求得甲丁弧次以甲丁弧減乙甲弧得乙丁弧

有乙角有丁角有乙丙弧求丁丙弧

先以乙角甲角乙丙弧求得丙甲弧次以丁角減半周得丁外角以丁外角甲角丙甲弧求得丁丙弧

有乙角有乙丙弧有乙丁弧求丙角

先以乙角甲角乙丙弧求得丙甲弧以丙甲弧乙丙弧甲角求得丙全角次求得乙甲弧次以乙甲弧減乙丁弧得丁甲弧次以丁甲弧丙甲弧甲角求得丙半角次以丙半角減丙全角得丙角

有乙角．有乙丙弧．有乙丁弧．求丁角．

先以乙角．甲角．乙丙弧．求得丙甲弧．次以丙甲弧．乙丙弧．甲角．求得乙甲弧．次以乙甲弧．減乙丁弧．得丁甲弧．次以丁甲弧．丙甲弧．甲角．求得丁外角．次以丁外角減半周．得丁角．

有乙角．有乙丙弧．有丁丙弧．求丙角．

先以乙角．甲角．乙丙弧．求得丙甲弧．次以丙甲弧．丙丁弧．甲角．求得丙半角．次以丙甲弧．乙丙弧．甲角．求得丙全角．次以丙全角．減丙半角．得丙角．

有乙角．有乙丙弧．有丁丙弧．求丁角．

先以乙角、甲角、乙丙弧、求得丙甲弧、次以丙甲弧、丁丙弧、甲角、求得丁外角、以丁外角減半周、得丁角、

有乙角、有丁角、有乙丙弧、求丙角、

先以乙角、甲角、乙丙弧、求得丙甲弧、次以丁角減半周、得丁外角、次以丁外角、甲角、丙甲弧、求得丙半角、次以乙丙弧、丙甲弧、甲角、求得丙全角、次以丙全角減丙半角、得丙角、

有乙角、有丙角、有乙丙弧、求丁角、

先以乙角、甲角、乙丙弧、求得丙甲弧、次以乙丙弧、丙甲弧、甲角、求得丙全角、次以丙全角、減丙角、得丙半

角。次以丙半角甲角丙甲弧。求得丁丙弧。次以丁丙弧丙形弧丙半角。求得丁外角。次以丁外角減半周。得丁角。

求外角之例

形外垂弧　按形外垂弧與形內垂弧同。惟丁角之度在形內則居丙丁甲正弧之內。在形外則屬乙丙丁形弧之中。故必多一

門人汪昌序　校字
男　廷琥

釋弧卷下

江都焦循學

求二鈍三鈍之術、必以次形立三弧三角之法、必以矢較次形之設有二、一互以小大、一互以弧角互以弧角者、以角爲心距半徑而弧之、以爲半周弧、其三角爲三弧、交其三弧爲三角、是爲次形、在此爲外角、在彼爲弧、在此爲餘弧、在彼爲角、故鈍可易而銳也、鈍易而爲銳、正弧斜弧之恆術可施矣

弧三角舉要言垂弧之法有三、一內垂、一外垂、一垂於次形、又曰正弧三角、斜弧三角、並有次形法、而其

用各有二其一易大形爲小形則大邊成小邊鈍角成銳角其一易角爲弧易弧爲角則三角可以求邊亦二邊可求一邊此言次形甚明又云三角減半周得次形三邊算得次形三角減半周得原設三邊又云法以本形三外角之度爲次形三邊以本形三邊減半周之餘爲次形三角次形之義數言盡之矣循

按渾圓之上有一周必有一周與之相交縱橫成十字縱者爲弧則橫者爲角橫者爲弧則縱者爲角弧三角爲三弧之相交每弧一縱一橫縱者交爲三弧橫者亦交爲三弧兩橫之相交爲鈍角其兩縱相交

必爲鈍角。蓋此縮則彼盈。此盈則彼縮。數之自然者也。

右圖乙丙丁三鈍角爲心作求甲庚午丑辛壬卯申（戊辰申癸）三半周相交成卯子甲三銳角形是爲次形酉未爲乙角酉庚爲乙外角午丑爲丙角辛丑爲丙外角申辰爲丁角申癸爲丁外角（壬辰亦丁外角）卯甲酉與甲酉庚皆象限同減甲酉則次形甲卯弧與乙外角酉庚同辛丑甲與丑甲子皆象限同減丑甲則次形子甲弧與丙外角辛丑同癸申卯與申卯子皆象限同減申卯則次形子卯弧與丁外角癸申同（壬辰子與辰子卯同減辰子壬辰亦與子卯同）己丙爲乙丙弧之餘午未爲甲角丁己爲乙丁弧之餘酉辰爲卯角戊丁爲丁丙弧之餘丑申爲子角己

丙未與丙未午皆象限同減丙未則乙丙餘弧之巳丙與甲角度午未同巳丁酉與丁酉辰皆象限同減酉丁則乙丁餘弧之丁巳與卯角度酉辰同依丁角之半周則酉辰爲卯角度依乙角之半周則庚亥爲卯角度庚亥之於乙午猶酉辰之於丁巳其度亦同戊丁丑與丁丑申皆象限同減丑丁則丁丙餘弧之戊丁與子角度丑申同依丁角之半周則丑申爲子角之度依丙角之半周則戊辛爲子角之度戊辛與丙未猶丑申與丁戊或以寅癸爲子角亦同辛未爲甲外角與乙丙弧同酉癸爲外角與乙丁弧同壬丑爲子外角與丁丙弧同

右圖乙丙丁二鈍角一銳角癸形子卯甲二銳角一鈍角二圖本梅勿菴弧三角舉要今復爲二圖於左

以明其理

右二圖室斗與尾氐交亢牛與心井交若以亢房尾爲三角形則尾心室亢爲角度而外角亢氐即室心

次形一弧也。室房爲尾角度。心房爲亢角度。卽爲心房室次形之兩弧。且尾心室亢爲本形弧。亢氐爲餘弧。心室亦爲次形房角度。於此可明弧角相易之理。互以小大者。於圜中爲兩半周。相交而得四形。銳角之弧。必鈍角之餘。減餘之弧二。共用之弧一。合而成之。亦曰次形。三鈍之形。減本形而得次形。次形所得。不待減而得本形。兩鈍之形。次形必三銳。角之銳者。弧之朒者。不必兩相易也。

對角外角之理。詳於幾何原本。凡圜內分四形。各形必有兩外角。一對角。必有兩餘弧。一共用之弧。三銳

形隨舉一角一弧皆必減半周用外用餘而所得者必對角必共用之弧故次形所得即本形之度不必復減半周如弧角相易之例也兩鈍一銳形其每形之爲兩外角一對角兩餘弧一共用之弧無異也唯所舉兩鈍角必易爲次形之銳角若所舉爲銳角其外角轉爲鈍角則不可用外角而宜用對角對角無容易者也抑唯所舉兩大弧必易爲次形之小弧若所舉爲小弧其餘弧轉爲大弧則不可用餘弧而宜用其用之弧其用之弧無容易者也其次形之所得亦然求得外角銳角必仍易爲鈍角求得餘弧之小

弧。必仍易爲大弧。若對角及共用之弧。則無容易。何

也。對角即本形之鋭角。其用之弧。即本形之小弧也。

右圖己戊乙與丙乙戊皆爲半周同減乙戊則丙乙與戊己同

右圖戊角爲丙對角己角爲乙對角其度皆等本形

乙丙丁三鈍夾形爲兩銳一鈍鈍角戊己皆對角

戊

丁戊半圓

丁戊半圓

丁

乙

乙丁本弧

右圖丁丙乙丙鈍角一銳角夾形丙乙戊必三銳角

丙乙丙鈍角用外角丁銳角即用本角丁丙丁乙丙

大弧用餘弧丙乙小弧即用本弧此本形變次形與三鈍角異也得戊角不減半周即丁角得丙乙兩鋭角必減半周乃得丙乙兩鈍角得次形丙乙弧不減半周即本形丙乙弧戊丙戊乙兩小弧必減半乃得丁丙丁乙兩大弧

以角得角以弧得弧爲簡然鈍角鋭角之減不減二鈍三鈍之不同法算時宜分別不誤以角得弧以弧得角兩費減半周之勞而其用外角用餘弧無分鋭角鈍角也用之爲便故表其例於左又正弧及斜弧之二鋭三鋭者均可用次形梅氏書詳言之然以無

正角而用垂弧不能垂弧而用次形次形者爲三鈍二鈍而設也今專詳三鈍二鈍之次形而正角鋭角者略焉顧鈍角之次形明則正角鋭角之次形可以推而識之惟不同於鈍角者有二凡鋭角弧度滿於限則次形必得正角二鈍三鈍之弧無滿限者則次形必無正角之理一也三鋭二鋭用一外角兩本角以得次形三鈍二鈍皆用外角以得次形二也明於此二者之異其同者不待言矣

有兩角一弧求弧

以兩角一弧各減半周爲次形之兩弧一角用兩弧

一角求得次形所求之角減半周得本形之弧

有兩角一弧求角

以兩角一弧各減半周爲次形之兩弧一角用兩弧一角求得次形所求之弧減半周得本形之角

有兩弧一角求弧

以兩弧一角各減半周爲次形之兩角一弧用兩角一弧求得次形所求之角減半周得本形之弧

有兩弧一角求角

以兩弧一角各減半周爲次形之兩角一弧用兩角一弧求得次形所求之弧減半周得本形之角

矢較之法有二一以總弧較存弧一以初數得後數

二法並詳梅氏環中黍尺戴氏句股割圜記謂之正視之規差角與弧爲比例止舉三弧無比例之處故

不用弦而用矢不用側視而用平儀

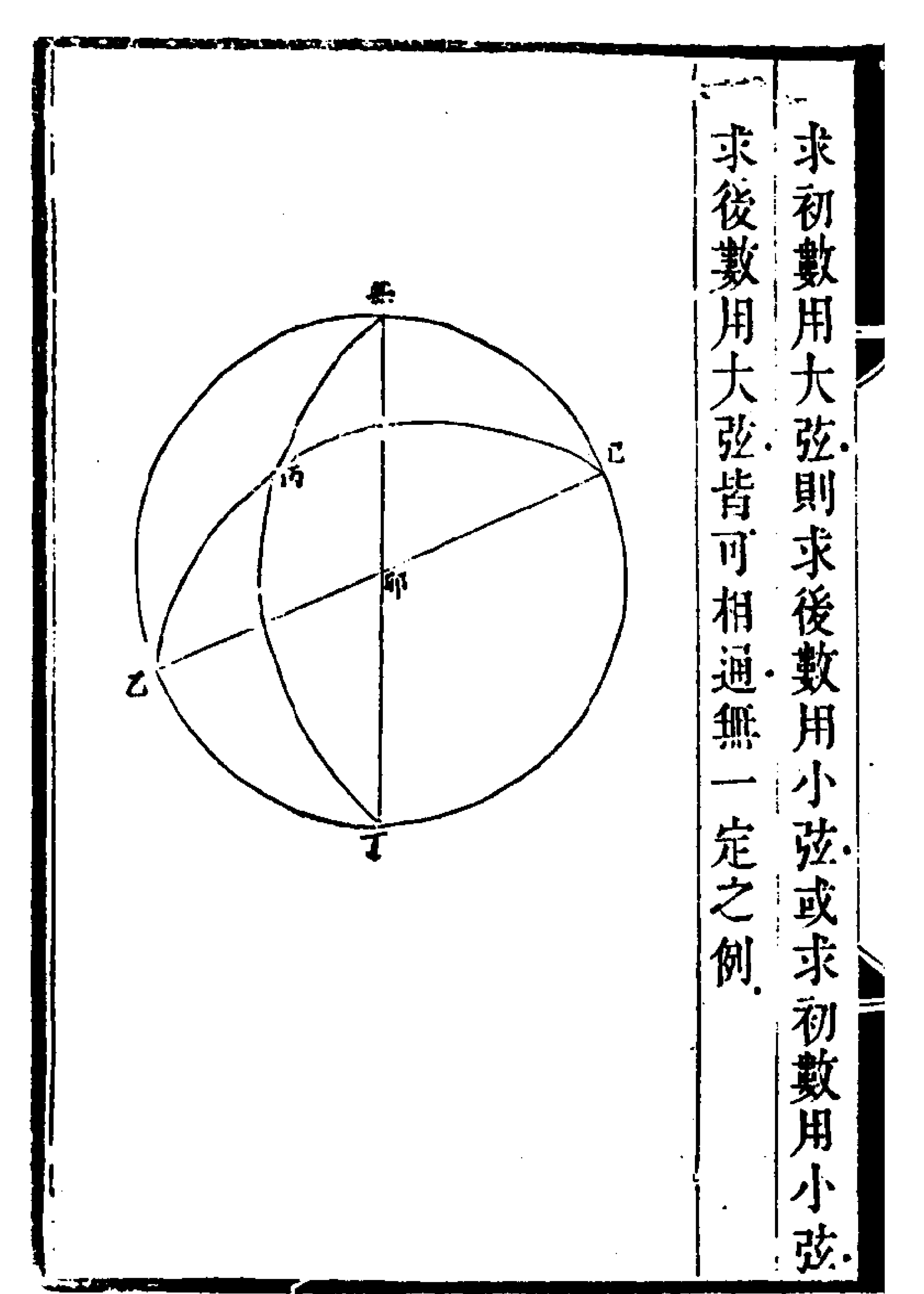
所求之角曰本角居兩个者曰夾角角兩个之弧曰夾弧對本角曰對弧夾弧之修者曰大弧促者曰小弧循弧而規之其一爲圜周其二爲半周夾弧之半周形必縮對弧之半周形必側其弧縮者弦縮其弧側者弦側惟其縮故度不減惟其側故法以互弧有大小而較生焉較弧有弦而矢截焉以較弧之矢減對弧之矢其減

之餘曰兩矢較。欲得對弧之矢。必先得兩矢之較。以兩矢之較合較弧之矢。而對弧之矢得矣。兩矢之較。未易得也。求同於兩矢之較者曰後數。同於兩矢之較。未易得也。求比於角度之矢者曰初數。此初數後數之義也。

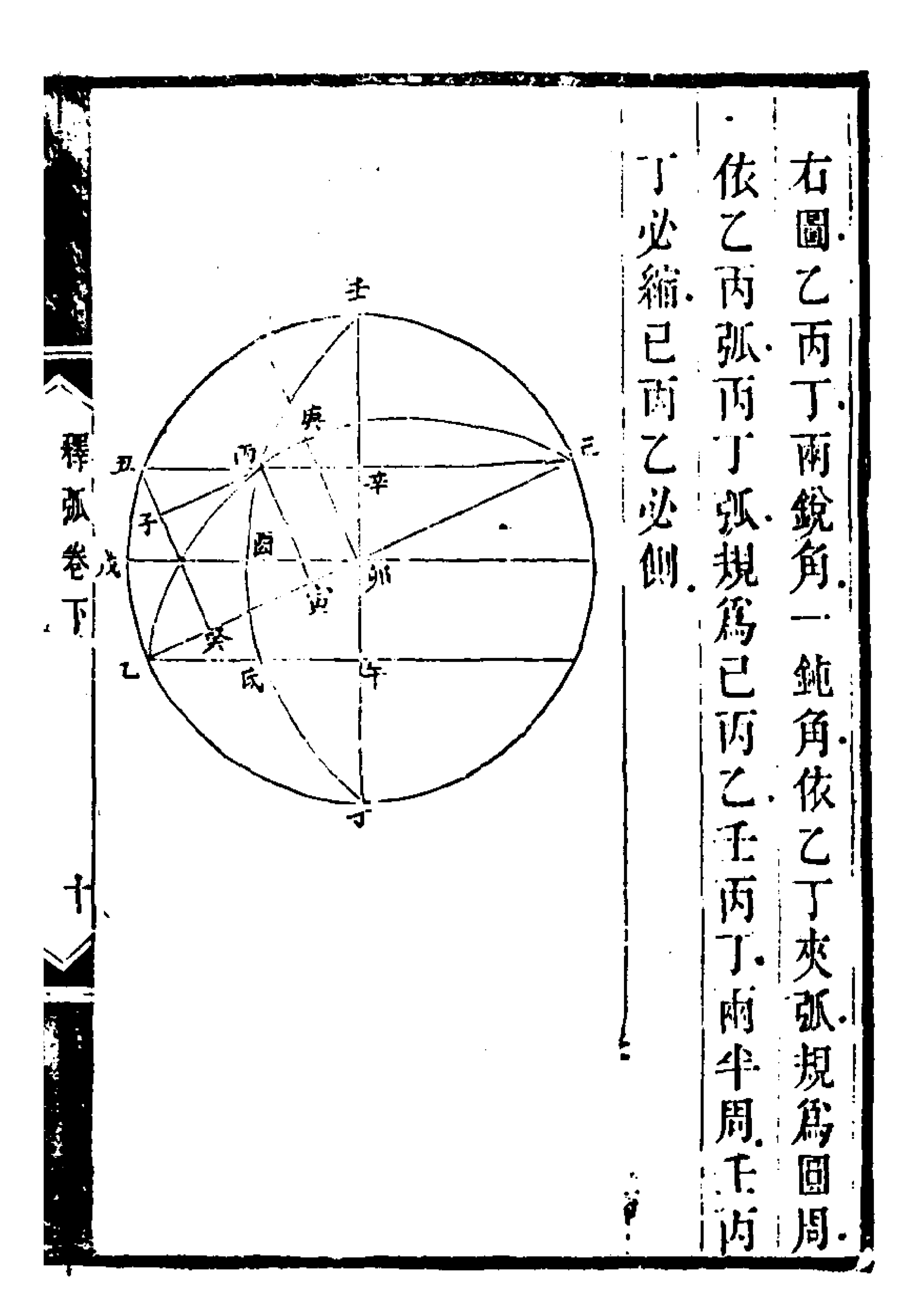
用平儀則距等弧之矢。可以例全徑。距等矢之半。可以例半徑。角度之矢。依角之鈍銳爲大小。鈍角則大於半徑。銳角則小於半徑。以半徑與角度之矢。例正弦。則所得之數爲初數。以半徑與小弧之弦。例初數。則所得之數爲後數。以初數爲弦。後數爲句。以半徑爲弦。小弦爲句。其例一也。有一半徑。一大弦。一小弦。

求初數用大弦則求後數用小弦或求初數用小弦

求後數用大弦皆可相通無一定之例



右圖乙丙丁兩銳角一鈍角依乙丁夾弧規爲圜周依乙丙弧丙丁弧規爲己丙乙壬丙丁兩半周壬丙丁必縮己丙乙必侈



右圖三弧求鋭角

右圖丁丙弧丙辛正弦卯辛餘弦丙乙弧丙寅正弦辛寅餘弦乙丁弧乙午正弦卯午餘弦

右圖丁丙卽丁丑丑乙爲較弧乙癸爲較弧矢丑癸爲較弧弦辛丁爲丙丁之矢午丁爲乙丁之矢辛午

爲矢較。辛卯與卯午爲半矢較。辛丙與辛丑同。丁丙之正弦辛丙如丁丑之正弦辛丑。

右圖。乙癸爲較弧矢。寅乙爲對弧矢。寅癸爲兩矢較。

丑丙爲初數。與乙氐同。丙子爲後數。與寅癸同。卯戌與酉戌。猶辛丑與丙丑。卯乙與乙午。猶丙丑與丙子。卯戌爲丁角之半徑。卯乙爲丁乙弧之半徑。辛丑爲丁丙弧之弦。乙午爲乙丁弧之弦。凡距等之矢皆夾弧之弦卯乙午句股形。猶丑丙子句股形。或大或小。而比例皆同也。以午乙與乙卯。例丙子與丙丑。則得丙丑。以辛丑與丙丑。例卯戌與酉戌。則得酉戌。是爲丁角度。以半徑卯戌與大弦辛丑。例丁角酉戌與初數丙丑。以卯乙例小弧之弦。得後數丙子。或以卯戌與乙午比例。得乙午。得乙氐。爲初數。大以卯丁與辛丑比例。得後數。

其義亦同。

右圖三弧求鈍角。

右圖乙丙丁三鈍角以卯卯戊與酉戊例小弧之弦丙辛得初數丙丑以卯乙例大弧之弦乙午得後數

右圖乙丙丁三銳角戴氏何股割圜記弟五十弟五十一二圖吳氏以上圖爲三銳下圖爲三鈍按之弟五十圖仍兩銳也今由阜孔氏刻本雖爲改正遂缺

三鈍一圖爲此補之。

一角兩弧求角

先以角度之矢乘一弧正弦。半徑除之。得初數。次以初數乘一弧正弦。半徑除之得後數。次以後數併較弧之矢。得對弧之矢。次以對弧之矢。減半徑。得對弧餘弦。

兩角一弧求角

先以本形求次形。次形次以兩弧一角。求得弧。又以次形復爲本形。

三弧求角

先以兩矢較乘半徑。以一弧正弦除之。得初數。次以初數乘半徑。以一弧正弦除之。得角度之矢。次以角度之矢減半徑。得餘弦。

三角求弧

先以本形求次形。次形以三弧求角。又以次形復爲本形。

大弧小弧之和曰總弧。其較曰存弧。截總弧之所至而畫之。爲總弧之弦。以弦截矢。爲總弧之矢。截存弧之所至而畫之。爲存弧之弦。以弦截矢爲存弧之矢。自所截以及於心。爲兩弧之餘弦。總弧之矢減存弧之矢。亦曰

兩矢較.中兩矢較而半之.曰半矢較.兩矢並集一半徑.則兩餘弦相減.減之同半矢較之度.兩矢各居一半徑.則兩餘弦相加.加之同半矢較之度.以半矢較求對弧較弧之兩矢較.猶以半徑與本角之矢.此之謂以總弧較存弧也.總弧適足半周.則存弧之矢必半徑.其餘弦亦如之.於是總弧以全徑爲之矢.以半徑爲兩弧之矢較.兩夾弧同度.則無對弧.存弧矢較而有對弧之矢.於是以正弦爲總弧之弦.以對弧之矢爲半矢較.此又總弧存弧之變也.

右圖乙丁巳總弧戊乙存弧合得半周己寅總弧弦

寅乙總弧矢戊癸存弧弦癸乙存弧矢寅卯總弧餘

戊
己
寅
卯
丙
子
癸
乙
丁

弦。癸卯存弧餘弦。子癸爲對弧矢。減較弧矢之兩矢較。寅癸爲總弧存弧之兩矢較。

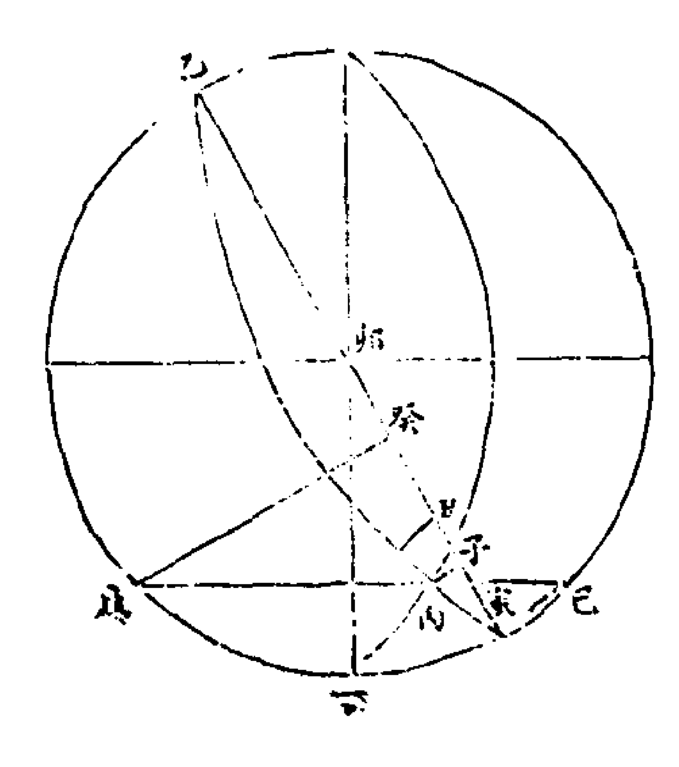


右圖總弧存弧均過象限前圖寅癸折半恰當卯此折半當丑寅丑與癸丑皆半矢較鈍角丑在子癸之閒銳角丑在子癸之外

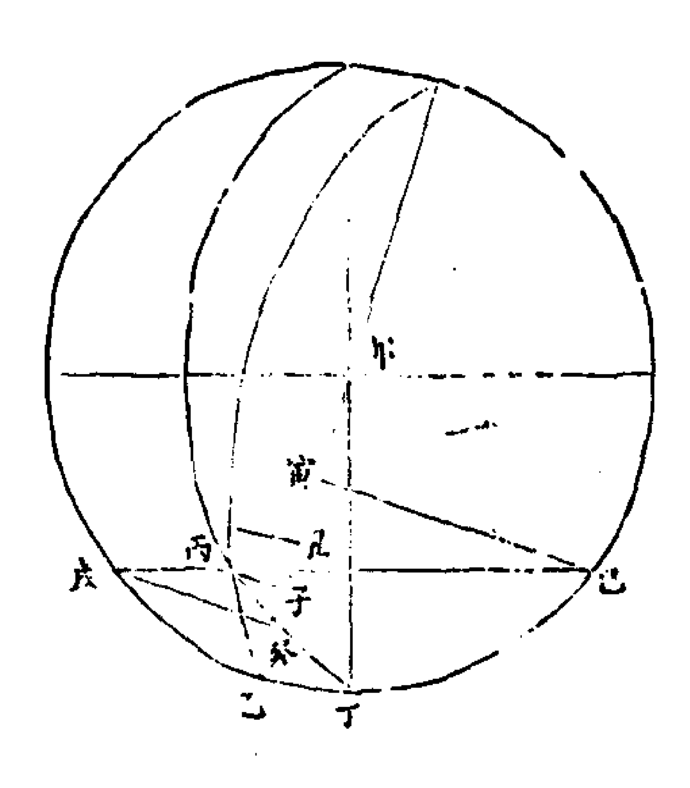
右圖總弧乙丁巳過象限存弧戊乙不過象限

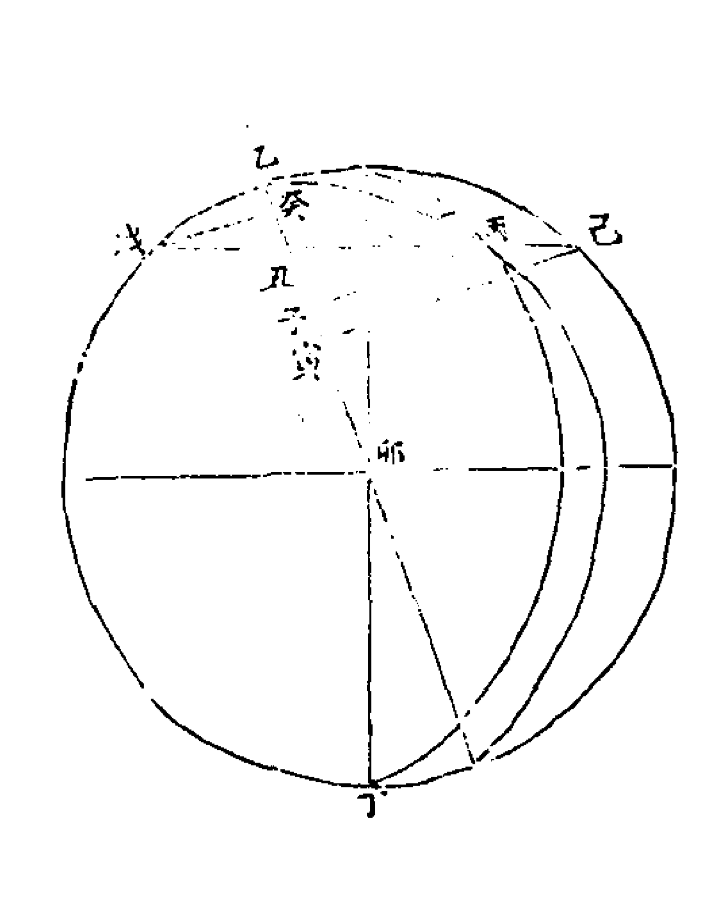
右圖總弧乙巳丁過兩象限存弧不過象限

右圖總弧乙巳丁過兩象限存弧過象限



右圖總弧乙丁巳存弧戊乙均不過象限



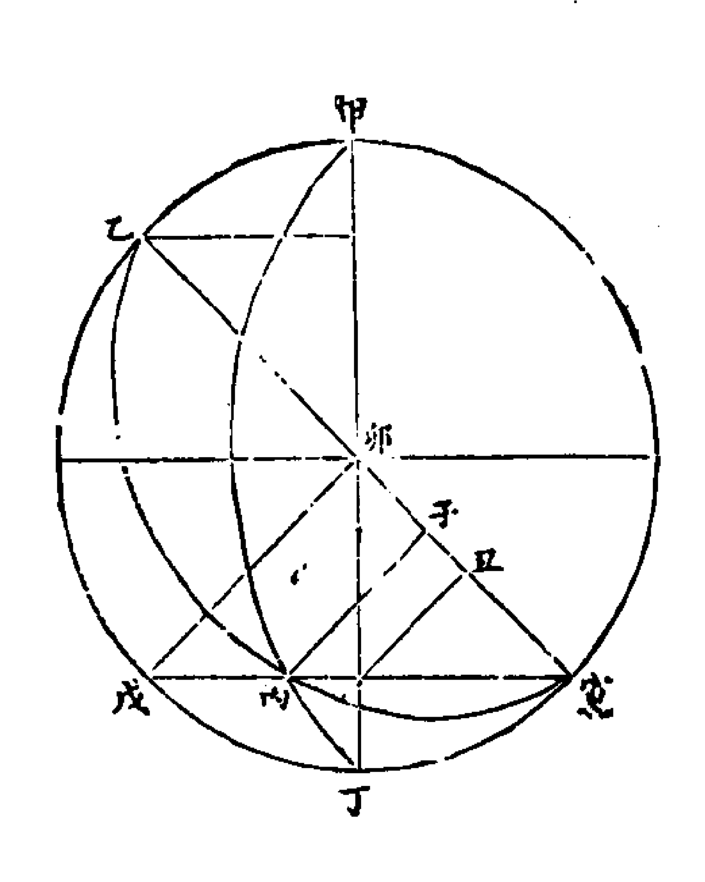


右圖總弧乙丁巳過三象限存弧戊乙不過象限

環中黍尺之例云角旁兩弧度相加爲總相減爲存

總弧過象限。以總存兩餘弦相加。不過象限則相減。矩折半爲初數。若總弧過兩象限。與過象限法同。過三象限。與在象限內同。若存弧亦過象限則反其加減。以循考之。餘弦必以矢端至心爲度。如癸之於卯。寅之於卯。是也。（癸爲存弧之矢端寅爲總弧之矢端卯爲圜周之心）今所用者癸寅兩餘弦。必兼以卯。各居一半徑。則卯在寅癸之間。卯無礙於寅癸。直以寅卯與卯癸合之可也。其集一半徑。則卯或在寅外。（如右總弧過三象限）或在癸外。（加前總弧存弧均過限圖）用寅癸則卯爲多度。故必去寅卯存寅癸。或去癸卯存癸寅。然則餘弦之或加或減。視乎卯之在外在中。卯之在

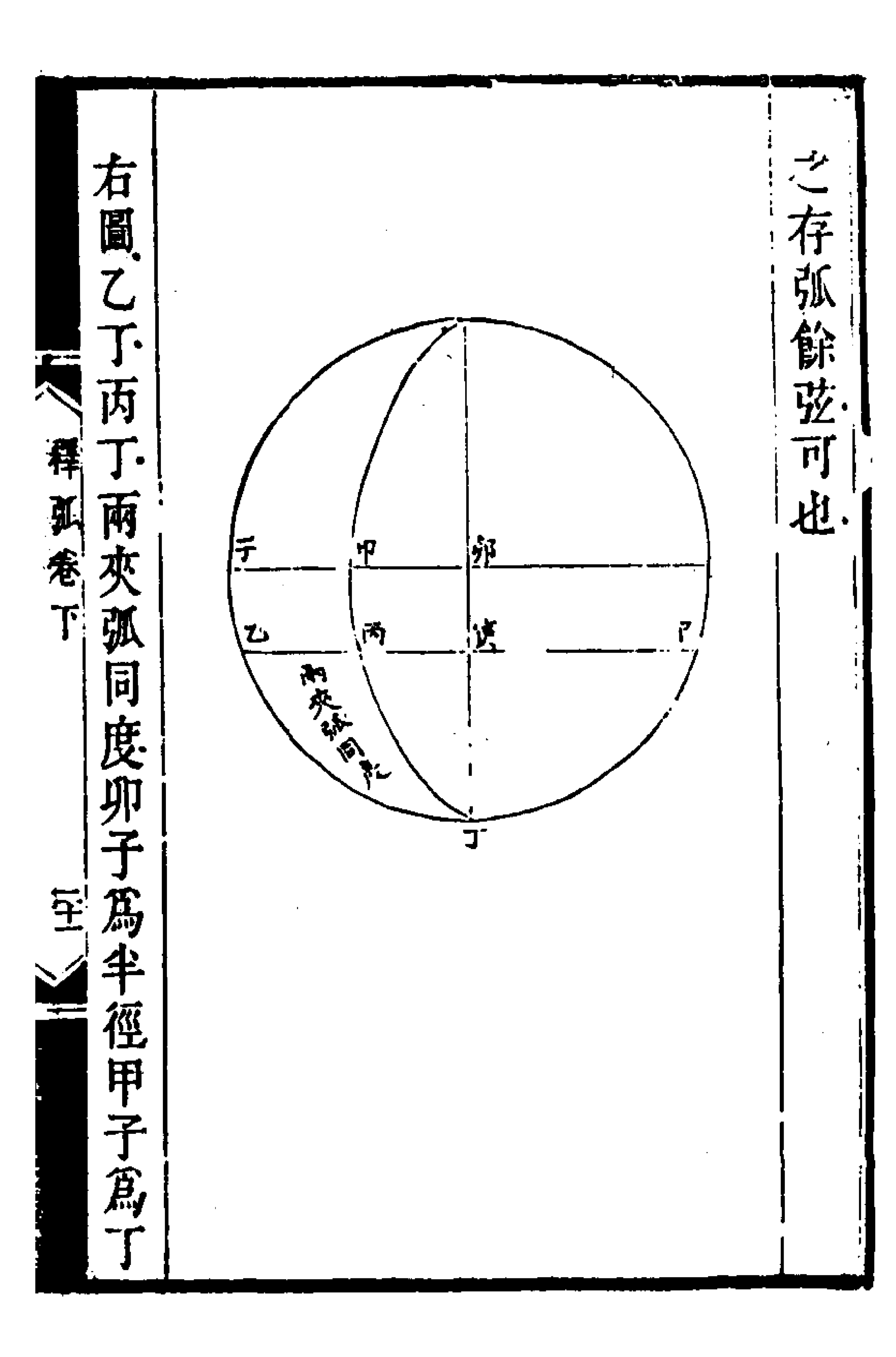
外在中。視乎兩矢端之在一半徑與兩半徑而兩矢端之所在。正不繫乎總弧存弧之過與不過。故直易其過不過之例曰並集曰各居而後爲一定之例也。然所用者癸寅也。癸寅者何。卽兩矢端之間餘弦之所以加所以減。皆由兩矢端之故。則與其用餘弦而多一加減之緐。何如直用兩矢端之爲捷。故東原氏之例曰。以左右兩距。相併爲和度相減爲較度。卽總弧存弧和度較度之矢。相減半之。爲矢半較。東原氏之術。視勿菴爲約矣。



右圖戊卯爲存弧之弦乙卯爲存弧之矢總弧滿半周則無弦其矢卽乙卯寅則以乙卯減乙卯寅存卯

寅。爲兩矢較。亦卽爲半徑也。勿菴以半徑爲餘弦。東原氏駮之。葢大矢已滿圜徑。不容有弦。何有餘弦。則半徑爲矢較之說長也。然存弧以半徑爲矢。與全徑相減。故半徑得爲總弧存弧之矢較。而存弧以半徑爲矢。卽以半徑爲弦。以半徑爲弦。卽以半徑爲餘弦。則謂半徑爲總弧之餘弦。不可。謂半徑爲存弧之餘弦。無不可。存弧總弧之餘弦。加減而折半之例也。梅八之例今止有存弧餘弦。無總弧餘弦相減。則竟用而半之爲初數。用矢半較。自捷於用餘弦。總弧滿半周。旣於用半徑。則從乎矢較。謂之矢較。可也。從乎餘弦。謂

之存弧餘弦可也



右圖乙丁丙丁兩夾弧同度卯子爲半徑甲子爲丁

角寅乙爲夾角正弦丙乙爲對弧之矢無存弧不得有存弧之餘弦無矢較自不必有矢半較總弧之弦已寅猶正弦寅乙半徑角度與正弦比例得矢半較此比例得對弧之矢亦如矢半較矣

一角兩弧求弧

一以兩弧相併爲總弧又相減爲存弧次以總弧之矢減存弧之矢又折半之爲半矢較以半矢較乘本角之矢半徑除之得對弧之兩矢較加較弧之矢得對弧矢以減半徑得餘弦

一弧兩角求角

以本形減半周作次形用兩弧一角求弧法求之復減半周爲本形

三弧求角

以兩矢較乘半徑半矢較除之得本角之矢

三角求弧

以本形減半周作次形用三弧求角法求之復減半周爲本形

若弧與限等則兩矢之較卽以例本角之矢或兩弧相若而端抵於限則本角之矢卽對角之弧正角有兩無容算矣

右圖乙丁弧適滿象限丑乙為較弧丑巳為較弧弦

丙子為對弧弦丑丙為兩矢較丙寅為大弧弦丑丙

即子己寅丑即寅丙三弧求角以丙丑乘半徑寅丑除之得角度之矢以角矢乘寅丑半徑除之即丙丑

壬

乙 丙 卯

乙正角 丙正角

丁

右圖乙丙乙丁皆九十度則丙乙爲丁角之度即對弧之矢矣其丙角乙角皆滿九十度既無待求而丁銳角即對小弧對小弧即丁銳角不待算而知也

門人汪昌序

男　廷瓏　校字